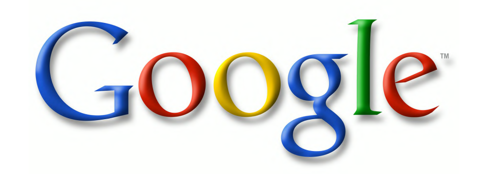
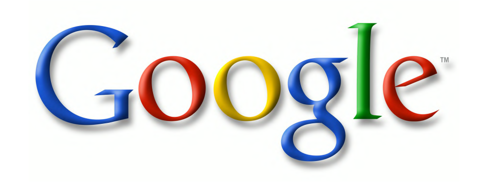




FORMES QUADRATIQUES

ET

MULTIPLICATION COMPLEXE.

DEUX FORMULES FONDAMENTALES

D'APRÈS KRONECKER,

PAR

J. DE SEGUIER, S. J.

PROFESSEUR A L'UNIVERSITE D'ANGERS.

BERLIN,

FELIX L. DAMES,

Koch Strasse, 3.

1894

SUR

DEUX FORMULES FONDAMENTALES

DANS

LA THÉORIE DES FORMES QUADRATIQUES

ET

DE LA MULTIPLICATION COMPLEXE

D'APRÈS KRONECKER.

PRÉFACE.

Le grand Mémoire de L. Kronecker *Zur Theorie der elliptischen Functionen,* dont la publication, commencée en 1883, a été interrompue par la mort de son illustre auteur, porte le caractère évident d'une étude qui se poursuit librement sur des sujets connexes, mais sans plan préconçu. Cependant, trois Parties s'y dessinent assez nettement : une Partie plutôt algébrique, c'est l'Article XI tout entier; une Partie plutôt arithmétique, ce sont les Articles I-X, XII-XIX; une Partie contenant presque exclusivement des transformations de séries elliptiques invariantes et qu'on pourrait à cause de cela nommer Partie analytique : ce sont les Articles XX-XXII. Je me suis attaché à la Partie arithmétique.

Ce qui en fait le charme, c'est l'extrême élégance des résultats, la profondeur et la puissance de l'analyse. Ce qui en fait la difficulté, c'est principalement une théorie des formes quadratiques assez différente de celle de Gauss et Dirichlet, constamment employée, constamment supposée, indiquée seulement en quatre pages qui n'en laissent guère paraître que la beauté (Art. VIII). Aussi bien Kronecker promettait de consacrer à son développement un Mémoire spécial ([1]).

Ces recherches sur les rapports des formes quadratiques avec les fonctions elliptiques sont groupées autour de deux formules extrêmement remarquables. La première est une extension féconde de l'équation fondamentale de Dirichlet. La seconde, qui donne l'expression de la limite

$$(1)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\lim_{\rho=0}\left[\frac{-1}{\rho}+\frac{1}{2\pi}\sum_{m,n}(am^2+bmn+cn^2)^{-1-\rho}\right] \\ &\qquad (m,n=\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots), \end{aligned}\right.$$

par les fonctions $\mathfrak{I}$, rend pour ainsi dire sensible le lien si secret qui rattache les formes arithmétiques de Gauss à la multiplication complexe d'Abel. Dans cette Partie de son Œuvre, Kronecker donne la dernière forme à des idées qu'il approfondissait depuis trente ans. Il écrivait en 1858 à Dirichlet ([2]) que son esprit avait besoin de beaucoup de temps pour mûrir sa pensée. On peut juger du moins à quelle maturité il la faisait parvenir.

C'est de cette correspondance avec son ancien maître, devenu son ami, que semble dater l'origine de ses recherches. Il est intéressant d'y voir ([3]) combien il avait été frappé d'une première esquisse de la généralisation des sommes de Gauss par les fonc-

---

([1]) Art. XVIII, § 1, première note.
([2]) *Göttinger Nachrichten*, 1885.
([3]) *Göttinger Nachrichten*, p. 361 et p. 379; 1885. Voir en particulier la huitième Lettre et la réponse de Kronecker.

tions elliptiques que lui avait envoyée Dirichlet. Dès 1863, il publiait en substance tout ce qui se trouve dans la Communication de 1885. En 1864, il commençait à perfectionner la théorie des formes quadratiques ([1]), mais sans introduire encore ses notations. Depuis lors, il n'a cessé de la remanier dans ses cours à l'Université de Berlin, et c'est seulement en 1885 qu'il la jugeait suffisamment achevée pour publier à nouveau, mais avec plus de développements et sous une forme beaucoup plus parfaite, les résultats de 1863. Il y est revenu depuis une fois encore; l'édition que le monde savant attend de M. Hensel révélera les fruits de cette dernière étude.

En 1885, d'autre part, la limite (1) n'avait été calculée par Kronecker que pour des valeurs réelles, d'ailleurs quelconques, de a, b, c rendant $4ac - b^2$ positif. C'est en 1889 seulement, après de nouvelles études sur les irrationnelles ([2]), que, convaincu de la possibilité d'étendre ces résultats au cas où a, b, c sont complexes, il eut aussi la satisfaction d'y arriver (Art. XIII).

Du rapprochement des deux formules signalées de Kronecker résulte immédiatement la relation ([3])

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\tau\sqrt{\Delta}}{2\pi} H(D_1) H(D_2) \\ &\quad = \sum_{a,b,c} \left(\frac{D_1}{a}\right) \log c \left[\mathfrak{I}'\left(0, \frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2c}\right) \mathfrak{I}'\left(0, \frac{b+i\sqrt{\Delta}}{2c}\right)\right]^{-\frac{2}{3}} \\ &\qquad\qquad (D_1 D_2 = D_0 = -\Delta) \end{aligned}\right.$$

qui sert de fondement au calcul des normes partielles d'invariants de classe.

Le présent Ouvrage se divise naturellement en trois Parties. Les deux premières sont consacrées chacune à une des deux for-

---

([1]) *Monatsberichte*, 1864.
([2]) *Sitzungsberichte*, p. 125; 1889.
([3]) *Monatsberichte*, p. 47; 1863. *Sitzungsberichte*, p. 779; 1885.

mules de Kronecker et à quelques applications [1]. La troisième est une application combinée des deux formules.

Dans la première Partie, j'ai dû reprendre presque en entier la théorie des formes quadratiques pour établir les belles relations énoncées seulement par Kronecker [2]. En complétant les calculs commencés par Dirichlet, j'obtiens une expression unique des sommes de Gauss pour tous les cas, et j'indique quelques points de vue peut-être nouveaux sur le théorème de réciprocité, en particulier, sur la dépendance qui existe entre les symboles $\left(\frac{-1}{p}\right)$, $\left(\frac{2}{p}\right)$, $\left(\frac{p}{q}\right)$, $\left(\frac{q}{p}\right)$. Le résultat le plus saillant me paraît être l'expression unique du nombre des classes, quel que soit le discriminant. On sait que Dirichlet après de laborieux calculs est obligé de distinguer six cas. Kronecker, qui n'indique pas ses calculs, en distingue encore deux. Je crois être arrivé simplement à réunir en une les deux formules de l'illustre savant. Une modification à la forme donnée aux caractères par Dirichlet a permis d'employer la première formule fondamentale de Kronecker à une démonstration facile du théorème capital de la théorie des genres. On remarquera enfin le dernier théorème du Chapitre V sur le groupe $\mathfrak{A}_d$, qui a rendu possibles les généralisations de la troisième Partie.

Dans la deuxième Partie j'ai légitimé des intégrations et dérivations de séries sur lesquelles Kronecker n'avait pas cru devoir s'arrêter. J'ai également abrégé la démonstration de la seconde formule de Kronecker.

Les résultats de la troisième Partie sur les normes d'invariants

---

(1) Pour ne pas être entraîné trop loin, j'ai évité tout ce qui tient à la théorie des nombres algébriques. C'est ainsi que j'ai dû omettre une application intéressante de la formule (1) de Kronecker, qu'on trouvera dans le beau Livre de M. Weber : *Elliptische Functionen und algebraische Zahlen*, § 114.

(2) L'étude de l'équivalence des formes réduites a été omise, comme n'étant pour ainsi dire pas atteinte par le changement de notations dû à Kronecker. Elle n'était d'ailleurs pas nécessaire à mon objet. On la trouvera faite avec détail dans les *Vorlesungen über Zahlentheorie* de Dirichlet.

me semblent offrir quelque intérêt. Comme je l'ai fait remarquer, la formule (2) les contient en germe. Mais, cette formule ayant une beauté particulière, Kronecker s'y était arrêté. M. Weber [1], conduit par des recherches d'un ordre différent à signaler de nouvelles fonctions modulaires comme invariants de classe, arrivait en 1888 à déterminer leurs normes partielles pour chaque genre dans les cas $Q=1, 2$. La formule (2) donne presque immédiatement les normes partielles quand $Q=1$. Mais M. Weber, fidèle encore aux notations de Gauss, ne s'en est pas servi; bien plutôt il la retrouve par une autre voie et sous une forme différente pour l'étendre ensuite au cas où $Q=2$. L'application aux 65 discriminants signalés par Euler et Gauss [2], qui ne contiennent qu'une classe par genre, était alors naturelle. Pour 32 de ces discriminants, $Q=1$; pour 15 autres, $Q=2$. 18 discriminants singuliers échappaient encore à cette analyse qui se complique avec le nombre Q. M. Weber, engagé d'ailleurs dans ses belles recherches algébriques, détermine les 18 invariants correspondants avec bien d'autres à l'aide des équations de transformation.

Partant de la formule (2) de Kronecker, j'essayai de l'étendre au cas où Q est une puissance d'un nombre premier, puis à celui où Q est quelconque. Je remarquai alors que la solution aisée du cas général dépendait de l'usage des quantités ε_n et de la première formule de Kronecker, si toutefois le théorème déjà signalé sur le groupe $\mathfrak{R}_d$ était exact. La démonstration de ce théorème, qui, à ma connaissance, n'avait pas encore été donnée, permit alors d'écrire la formule générale.

---

(1) *Acta mathematica*, t. XI; *Mathematische Annalen*, t. XXXIII, p. 390; *Elliptische Functionen und algebraische Zahlen*, §§ 113 et 114. Le second Mémoire une démonstration nouvelle de la seconde formule de Kronecker pour le cas où a, b, c sont réels : le point de départ est analogue; mais la marche qui ramène à la série de Fourier est toute différente.

(2) *Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin*, p. 338; 1776; GAUSS, *Disq.*, art. 303.

A la détermination des normes pour un discriminant quelconque, qui fait l'objet principal de la troisième Partie, se rattache enfin l'extension toute voisine des recherches de Kronecker sur la solution de l'équation de Pell par les fonctions elliptiques.

Il me reste peut-être à m'excuser de n'avoir pas été assez concis. Mais, dans le développement mathématique, l'excès n'est-il pas moins pénible au lecteur que le défaut? D'ailleurs j'avais lieu de croire ces matières peu connues en France.

Angers, 8 décembre 1892 [1].

---

(1) M. Weber a publié, dans les *Göttinger Nachrichten* de 1893, une suite d'articles dont l'objet coïncide partiellement avec celui de mon travail. J'en ai malheureusement eu connaissance trop tard pour pouvoir m'en servir. J'ai essayé néanmoins dans trois notes placées à la fin du Volume, de faire ressortir la supériorité des démonstrations de M. Weber pour plusieurs des relations arithmétiques obtenues par Kronecker et pour le théorème central de la théorie des genres. Le lecteur trouvera en outre, dans le Mémoire de M. Weber, une intéressante étude des propriétés algébriques de la fonction $\sum_{m,n} e^{2i\pi\omega(am^2+bmn+cn^2)}$.

PREMIÈRE PARTIE.

LA PREMIÈRE FORMULE DE KRONECKER.

PREMIÈRE SECTION.

THÉORIES PRÉLIMINAIRES.

CHAPITRE I.

LES SOMMES DE GAUSS.

§ 1. La série de Fourier.

Considérons une fonction de plusieurs variables complexes

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_h),$$

et proposons-nous d'en trouver un développement de la forme

$$\sum_{n_1=-\infty}^{n_1=+\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{n_2=+\infty} \cdots \sum_{n_h=-\infty}^{n_h=+\infty} A_{n_1, n_2, \ldots, n_h} e^{2i\pi \sum_{i=1}^{i=h} \frac{n_i z_i}{\omega_i}},$$

lorsque les z_i sont assujettis à parcourir les segments respectifs $\overline{u_i, u_i + \omega_i}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, h)$. Évidemment ce développement, qui admet les périodes ω_i, ne pourra convenir en général pour d'autres valeurs des z_i; il fournira donc une expression analytique

d'une fonction f_1 définie par la condition de coïncider avec la proposée dans les limites indiquées et d'admettre les périodes ω_i.

Remarquons d'abord que, si le développement est possible, on aura, en multipliant les deux membres de

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_h) = \sum_{n_1=-\infty}^{n_1=+\infty} \cdots \sum_{n_h=-\infty}^{n_h=+\infty} A_{n_1, n_2, \ldots, n_h} e^{2i\pi \sum_{i=1}^{i=h} \frac{n_i z_i}{\omega_i}},$$

par $e^{-2i\pi \sum_{i=1}^{i=h} \frac{m_i z_i}{\omega_i}} dz_1\, dz_2 \ldots dz_h$ et en intégrant suivant les segments u_i, $u_i + \omega_i$,

$$\int_{u_1}^{u_1+\omega_1} dz_1 \int_{u_2}^{u_2+\omega_2} dz_2 \ldots \int_{u_h}^{u_h+\omega_h} dz_h\, f(z_1, \ldots, z_h) e^{-2i\pi \sum_{i=1}^{i=h} \frac{n_i z_i}{\omega_i}}$$
$$= A_{m_1, m_2, \ldots, m_h} \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_h,$$

puisque l'intégrale

$$\int_{u_1}^{u_1+\omega_1} dz_1 \ldots \int_{u_h}^{u_h+\omega_h} dz_h\, A_{n_1, n_2, \ldots, n_h} e^{2i\pi \sum_{i=1}^{i=h} \frac{(n_i - m_i)}{\omega_i} z_i}$$

n'est différente de zéro que pour $n_i = m_i$ $(i = 1, 2, \ldots, h)$.

Ce raisonnement, semblable à celui dont s'était contenté Fourier, fait seulement pressentir qu'il doit exister en général un développement de la forme

$$(1)\quad f_1(z_1, \ldots, z_h) = \sum_{n_1=-\infty}^{n_1=+\infty} \cdots \sum_{n_h=-\infty}^{n_h=+\infty} \int_{u_1}^{u_1+\omega_1} \frac{dv_1}{\omega_1} \cdots \int_{u_h}^{u_h+\omega_h} \frac{dv_h}{\omega_h} f(v_1, \ldots, v_h) e^{2i\pi \sum_{i=1}^{=h} \frac{z_i - v_i}{\omega_i} n_i}.$$

Pour s'en assurer, il est naturel de chercher à sommer la série qui figure au second membre de (1) et que je désignerai par S.

Posons $v_i = u_i + \omega_i t_i$, $z_i = u_i + \omega_i \zeta_i$; t_i, ζ_i seront réels et on aura, en écrivant

$$f(u_1 + \omega_1 t_1, u_2 + \omega_2 t_2, \ldots, u_h + \omega_h t_h) = \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_h),$$

$$S = \sum_{n_1=-\infty}^{n_1=+\infty} \cdots \sum_{n_h=-\infty}^{n_h=+\infty} \int_0^1 dt_1 \ldots \int_0^1 dt_h\, \varphi(t_1, \ldots, t_h) e^{2i\pi \sum_{i=1}^{i=h} n_i(\zeta_i - t_i)}.$$

Écrivons

$$S = \sum_{n_1=-\infty}^{n_1=+\infty} \cdots \sum_{n_{h-1}=-\infty}^{n_{h-1}=+\infty} \lim_{k=\infty} \sum_{n_h=-k}^{n_h=+k} \int_0^1 dt_1 \ldots$$

$$\ldots \int_0^1 dt_h\, \varphi(t_1, \ldots, t_h)\, e^{2i\pi \sum_{i=1}^{i=h} n_i(\zeta_i - t_i)}.$$

Les exponentielles où n_h varie seul formant une progression géométrique, on obtient

$$S = \sum_{n_1=-\infty}^{n_1=+\infty} \cdots \sum_{n_{h-1}=-\infty}^{n_{h-1}=+\infty} \int_0^1 dt_1 \ldots$$

$$\ldots \int_0^1 dt_{h-1}\, e^{2i\pi \sum_{i=1}^{i=h-1} \frac{\zeta_i - t_i}{\omega_i} n_i} \lim_{k=\infty} \int_0^1 \varphi(t_1, \ldots, t_h) \frac{\sin(2k+1)\pi(t_h - \zeta_h)}{\sin\pi(t_h - \zeta_h)} dt_h.$$

et l'on est ramené à des intégrales de Dirichlet.

Si φ n'a pour $0 \leqq t_h \leqq 1$, quels que soient $t_1, t_2, \ldots, t_{h-1}$, d'autres singularités que des changements brusques de valeur (en restant finie), ou des pôles α tels que $\int^{\alpha} \varphi\, dt_h$ reste finie quand t_h tend vers α par des valeurs supérieures ou inférieures à α et que la partie (réelle ou imaginaire, ou les deux parties) de φ qui devient infinie ait le même signe pour $t_h = \alpha_h + \varepsilon$ et $t_h = \alpha_h - \varepsilon$, ce que j'exprimerai en disant que φ satisfait par rapport à t_h aux conditions de Dirichlet, on a, pour toute valeur de ζ_h différente de 0 et de 1 où φ est continue,

$$(2) \quad \lim_{k=\infty} \int_0^1 \varphi(t_1, \ldots, t_h) \frac{\sin(2k+1)\pi(t_h - \zeta_h)}{\sin\pi(t_h - \zeta_h)} dt_h = \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_{h-1}, \zeta_h),$$

pour toute valeur ζ_h où la fonction est discontinue et pour $\zeta_h = 0$, $\zeta_h = 1$,

$$(3) \quad \begin{cases} \lim\limits_{k=\infty} \displaystyle\int_0^1 \varphi(t_1, \ldots, t_h) \frac{\sin(2k+1)\pi(t_h - \zeta_h)\, dt_h}{\sin\pi(t_h - \zeta_h)} \\ \quad = \frac{1}{2}[\varphi(t_1, \ldots, t_{h-1}, \zeta_h - 0) + \varphi(t_1, \ldots, t_{h-1}, \zeta_h + 0)] \text{ (1)}. \end{cases}$$

---

(1) Voir le *Traité d'Analyse* de M. Picard, t. I.

On peut réunir ces deux formules en une seule, valable pour tous les segments $\overline{u_h, u_h + \omega_h}$, y compris les extrémités, en écrivant

$$\lim_{k=\infty} \int_0^1 \varphi(t_1, \ldots, t_h) \frac{\sin(2k+1)\pi(t_h - \zeta_h)}{\sin\pi(t_h - \zeta_h)} dt_h$$
$$= \frac{1}{2} \Sigma\, \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_{h-1}, \zeta_h \pm 0)$$
$$= \frac{1}{2} \Sigma f(v_1, v_2, \ldots, v_{h-1}, z_h \pm 0),$$

la sommation s'étendant aux deux signes + et —.

En continuant ainsi de proche en proche, on obtient successivement

$$S = \sum_{n_1=-\infty}^{n_1=+\infty} \cdots \sum_{n_{h-1}=-\infty}^{n_{h-1}=+\infty} \int_0^1 dt_1 \ldots \int_0^1 dt_{h-1} \frac{1}{2} \Sigma\varphi(t_1, \ldots, t_{h-1}, \zeta_h \pm 0) e^{2i\pi \sum_{i=1}^{i=h-1} \frac{\zeta_i - t_i}{\omega_i} n_i}$$

$$= \sum_{n_1=-\infty}^{n_1=+\infty} \cdots \sum_{n_{h-1}=-\infty}^{n_{h-1}=+\infty} \int_{u_1}^{u_1+\omega_1} \frac{dv_1}{\omega_1} \cdots \int_{u_{h-1}}^{u_{h-1}+\omega_{h-1}} \frac{dv_{h-1}}{\omega_{h-1}} \frac{1}{2} \Sigma f(v_1, \ldots, v_{h-1}, z_h \pm 0) e^{2i\pi \sum_{i=1}^{i=h-1} \frac{z_i - v_i}{\omega_i} n_i},$$

$$S = \sum_{n_1=-\infty}^{n_1=+\infty} \cdots \sum_{n_{h-2}=-\infty}^{n_{h-2}=+\infty} \int_{u_1}^{u_1+\omega_1} \frac{dv_1}{\omega_1} \cdots \int_{u_{h-2}}^{u_{h-2}+\omega_{h-2}} \frac{dv_{h-2}}{\omega_{h-2}} \frac{1}{2^2} \Sigma f(v_1, \ldots, v_{h-2}, z_{h-1} \pm 0, z_h \pm 0) e^{2i\pi \sum_{i=1}^{i=h-2} \frac{z_i - v_i}{\omega_i} n_i}$$

. . . .

$$S = \sum_{n_1=-\infty}^{n_1=+\infty} \int_{u_1}^{u_1+\omega_1} \frac{dv_1}{\omega_1} \frac{1}{2^{h-1}} \Sigma f(v_1, z_2 \pm 0, \ldots, z_h \pm 0) e^{2i\pi \frac{z_1 - v_1}{\omega_1} n_1},$$

$$(4) \qquad S = \frac{1}{2^h} \Sigma f(z_1 \pm 0, z_2 \pm 0, \ldots, z_h \pm 0),$$

le signe Σ sans indice se rapportant à toutes les combinaisons des signes + et — dans l'expression qu'il affecte. On suppose que chaque terme de la dernière somme a un sens unique.

Ces formules supposent seulement que $f_1(z_1, z_2, \ldots, z_h)$ satisfait aux conditions de Dirichlet par rapport à chacune des variables z_i indépendamment des autres. La formule (4) est une expression générale du développement de Fourier. L'ordre des sommations dans la série multiple S est d'ailleurs indifférent, comme le montre l'analyse précédente.

Le second membre de cette dernière formule est une fonction égale à f partout où f est continue, et à la valeur moyenne de f partout où f est discontinue. On peut appeler cette fonction *fonction substituée,* car c'est elle que la nature du problème nous force à substituer à la proposée; en la désignant par f_1, on écrira la formule (4) de la manière suivante

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} f_1(z_1, z_2, \ldots, z_h) = \sum_{n_1=-\infty}^{n_1=+\infty} \cdots \sum_{n_h=-\infty}^{n_h=+\infty} \int_{u_1}^{u_1+\omega_1} \frac{dv_1}{\omega_1} \cdots \\ \cdots \int_{u_h}^{u_h+\omega_h} \frac{dv_h}{\omega_h} f_1(v_1, v_2, \ldots, v_h) e^{2i\pi \sum_{i=1}^{i=h} \frac{z_i - v_i}{\omega_i} n}. \end{aligned}\right.$$

C'est donc pour la fonction substituée que le développement (1) est pleinement réalisable.

De la formule (4), en posant $e^{\frac{2i\pi z_i}{\omega_i}} = \xi_i$, on déduit évidemment un développement de Laurent pour une fonction holomorphe des variables $\log \xi_i (i = 1, 2, \ldots, h)$.

Si la fonction proposée admet elle-même les périodes ω_i, comme on peut déplacer parallèlement à lui-même chaque segment $\overline{u_i, u_i + \omega_i}$, en le laissant dans une région où f est holomorphe par rapport à l'argument correspondant quels que soient les autres, on retrouve ainsi le développement de Fourier et celui de Laurent tels qu'ils se déduisent par la voie ordinaire du théorème de Cauchy.

D'après un théorème de M. Cantor, le développement d'une fonction en série de Fourier est unique ([1]). Si donc on connaît pour une fonction un développement de la forme

$$\sum_{n_1=-\infty}^{n_1=+\infty} \cdots \sum_{n_h=-\infty}^{n_h=+\infty} A_{n_1, \ldots, n_h} e^{2i\pi \sum_{i=1}^{i=h} \frac{n_i z_i}{\omega_i}},$$

on aura pour les $A_{n_1, \ldots, n_h}$ les valeurs d'une infinité d'intégrales

([1]) Voir CANTOR, *Journal de Crelle*, t. 72, p. 139; *Acta mathematica*, t. II, p. 337; E. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. I, p. 239. Une simple remarque suffit à étendre au cas de plusieurs variables le théorème de M. Cantor. On a, en

définies du type

$$\int_{u_1}^{u_1+\omega_1}\frac{dv_1}{\omega_1}\int_{u_2}^{u_2+\omega_2}\frac{dv_2}{\omega_2}\cdots\int_{u_h}^{u_h+\omega_h}\frac{dv_h}{\omega_h}f(v_1, v_2, \ldots, v_h)e^{-2i\pi\sum\limits_{i=1}^{i=h}\frac{n_i v_i}{\omega_i}}.$$

Le développement des fonctions $\mathfrak{S}$ en fournit un exemple très simple. On trouvera des exemples de fonctions à deux variables dans le *Traité des fonctions elliptiques* d'Halphen (t. I, Chap. XIII, *passim*) et dans le Mémoire de Kronecker *Zur Theorie der elliptischen Functionen* (Art. XX, § 7 et suiv., *passim*); j'en donnerai d'ailleurs quelques-uns dans la seconde Partie.

La formule (4) donne, pour $z_i = u_i$ ou $z_i = u_i + \omega_i$ $(i = 1, 2, \ldots, h)$,

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}&\sum_{n_1=-\infty}^{n_1=+\infty}\cdots\sum_{n_h=-\infty}^{n_h=+\infty}\int_{u_h}^{u_h+\omega_h}\frac{dv_h}{\omega_h}\cdots\int_{u_1}^{u_1+\omega_1}\frac{dv_1}{\omega_1}f(v_1, v_2, \ldots, v_h)e^{2i\pi\sum\limits_{i=1}^{i=h}\frac{u_i-v_i}{\omega_i}n_i}\\ &\quad = \frac{1}{2^h}\sum f\begin{pmatrix} u_1, & u_2, & \ldots, & u_h \\ u_1+\omega_1, & u_2+\omega_2, & \ldots, & u_h+\omega_h\end{pmatrix},\end{aligned}\right.$$

le signe Σ sans indice s'étendant à tous les termes obtenus en

---

écrivant, pour abréger, u_i au lieu de $e^{\frac{2i\pi n_i z_i}{\omega_i}}$,

$$S = \sum_{n_1=-\infty}^{n_1=+\infty}\cdots\sum_{n_h=-\infty}^{n_h=+\infty}A_{n_1, n_2, \ldots, n_h}u_1^{n_1}\cdots u_h^{n_h}$$

$$= \sum_{n_1}\left[\sum_{n_2}\cdots\sum_{n_h}A_{n_1, \ldots, n_h}u_2^{n_2}\cdots u_h^{n_h}\right]u_1^{n_1} = \sum_{n_1}\mathcal{A}_{n_1}u_1^{n_1}.$$

S'il existait une autre série

$$T = \sum_{n_1=-\infty}^{n_1=+\infty}\cdots\sum_{n_h=-\infty}^{n_h=+\infty}B_{n_1, \ldots, n_h}u_1^{n_1}\cdots u_h^{n_h}$$

$$= \sum_{n_1}\left[\sum_{n_2}\cdots\sum_{n_h}B_{n_1, \ldots, n_h}u_2^{n_2}\cdots u_h^{n_h}\right]u_1^{n_1} = \sum_{n_1}\mathcal{B}_{n_1}u_1^{n_1},$$

égale à S le long du segment relatif à z_1 (sauf peut-être en certains points isolés), on aurait

$$\mathcal{A}_{n_1} = \mathcal{B}_{n_1},$$

quels que soient $z_2, \ldots, z_h$ sur leurs segments respectifs. Or $\mathcal{A}_{n_1}$, $\mathcal{B}_{n_1}$ étant de nouvelles séries de Fourier, on pourra continuer de même, et l'on obtiendra enfin

$$A_{n_1, \ldots, n_h} = B_{n_1, \ldots, n_h}.$$

prenant les arguments d'indice différent dans les deux lignes de toutes les manières possibles. Remplaçons successivement u_1 par $u_1+\omega_1$, $u_1+2\omega_1$, ..., $u_1+(p_1-1)\omega_1$ et ajoutons les formules obtenues à la précédente; on aura

$$\sum_{n_1=-\infty}^{n_1=+\infty}\cdots\sum_{n_h=-\infty}^{n_h=+\infty}\int_{u_h}^{u_h+\omega_h}\frac{dv_h}{\omega_h}\cdots\int_{u_1}^{u_1+p_1\omega_1}\frac{dv_1}{\omega_1}f(v_1,v_2,\ldots,v_h)e^{2i\pi\sum_{i=1}^{i=h}\frac{u_i-v_i}{\omega_i}n_i}$$

$$=\frac{1}{2^h}\sum f\begin{pmatrix}u_1, & \ldots, & u_h\\ u_1+p_1\omega_1, & \ldots, & u_h+\omega_h\end{pmatrix}$$

$$+\frac{1}{2^{h-1}}\sum_{j_1=1}^{j_1=p_1-1}\sum f\begin{pmatrix}u_1+j_1\omega_1, & u_2, & \ldots, & u_h\\ & u_2+\omega_2, & \ldots, & u_h+\omega_h\end{pmatrix}.$$

Remplaçons dans cette formule u_2 par $u_2+\omega_2$, $u_2+2\omega_2$, ..., $u_2+(p_2-1)\omega_2$ et ajoutons les formules obtenues à la précédente; on aura

$$\sum_{n_1=-\infty}^{n_1=+\infty}\cdots\sum_{n_h=-\infty}^{n_h=+\infty}\int_{u_h}^{u_h+\omega_h}\frac{dv_h}{\omega_h}\cdots$$

$$\cdots\int_{u_2}^{u_2+p_2\omega_2}\frac{dv_2}{\omega_2}\int_{u_1}^{u_1+p_1\omega_1}\frac{dv_1}{\omega_1}f(v_1,v_2,\ldots,v_h)e^{2i\pi\sum_{i=1}^{i=h}\frac{u_i-v_i}{\omega_i}n_i}$$

$$=\frac{1}{2^h}\sum f\begin{pmatrix}u_1, & u_2, & \ldots, & u_h\\ u_1+p_1\omega_1, & u_2+p_2\omega_2, & \ldots, & u_h+\omega_h\end{pmatrix}$$

$$+\frac{1}{2^{h-1}}\sum_{j_2=1}^{j_2=p_2-1}\sum f\begin{pmatrix}u_1, & u_2+j_2\omega_2, & u_3, & \ldots, & u_h\\ u_1+p_1\omega_1, & & u_3+\omega_3, & \ldots, & u_h+\omega_h\end{pmatrix}$$

$$+\frac{1}{2^{h-1}}\sum_{j_1=1}^{j_1=p_1-1}\sum f\begin{pmatrix}u_1+j_1\omega_1, & u_2, & \ldots, & u_h\\ & u_2+p_2\omega_2, & \ldots, & u_h+\omega_h\end{pmatrix}$$

$$+\frac{1}{2^{h-2}}\sum_{j_1=1}^{j_1=p_1-1}\sum_{j_2=1}^{j_2=p_2-1}\sum f\begin{pmatrix}u_1+j_1\omega_1, & u_2+j_2\omega_2, & u_3, & \ldots, & u_h\\ & & u_3+\omega_3, & \ldots, & u_h+\omega_h\end{pmatrix}.$$

En continuant ainsi, on obtiendra manifestement

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
&\sum_{n_1=-\infty}^{n_1=+\infty}\cdots\sum_{n_h=-\infty}^{n_h=+\infty}\int_{u_1}^{u_1+p_1\omega_1}\frac{dv_1}{\omega_1}\int_{u_2}^{u_2+p_2\omega_2}\frac{dv_2}{\omega_2}\cdots\\
&\qquad\cdots\int_{u_h}^{u_h+p_h\omega_h}\frac{dv_h}{\omega_h}\,f(v_1, v_2, \ldots, v_h)\,e^{2i\pi\sum\limits_{i=1}^{i=h}\frac{u_i-v_i}{\omega_i}n_i}\\
&= \frac{1}{2^h}\sum f\begin{pmatrix} u_1, & \ldots, & u_h,\\ u_1+p_1\omega_1, & \ldots, & u_h+p_h\omega_h\end{pmatrix}\\
&\quad+\frac{1}{2^{h-1}}\Bigg[\sum_{j_1=1}^{j_1=p_1-1}\sum f\begin{pmatrix} u_1+j_1\omega_1, & u_2, & \ldots\\ & u_2+p_2\omega_2, & \ldots\end{pmatrix}\\
&\qquad\qquad+\sum_{j_2=1}^{j_2=p_2-1}\sum f\begin{pmatrix} u_1, & u_2+j_2\omega_2, & \ldots\\ u_1+p_1\omega_1, & & \ldots\end{pmatrix}+\ldots\Bigg]\\
&\quad+\frac{1}{2^{h-2}}\Bigg[\sum_{j_1=1}^{j_1=p_1-1}\sum_{j_2=1}^{j_2=p_2-1}\sum f\begin{pmatrix} u_1+j_1\omega_1, & u_2+j_2\omega_2, & u_3, & \ldots\\ & & u_3+p_3\omega_3, & \ldots\end{pmatrix}+\ldots\Bigg]\\
&\quad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\quad+\sum_{j_1=1}^{j_1=p_1-1}\cdots\sum_{j_h=1}^{j_h=p_h-1} f(u_1+j_1\omega_1,\, u_2+j_2\omega_2,\, \ldots,\, u_h+j_h\omega_h).
\end{aligned}\right.$$

C'est une généralisation de la formule (6).

Voici quelques applications qui se présenteront dans la suite.

La formule (4) donne, pour $u=0$, $\omega=1$, $f(z)=z^2-z+\frac{1}{6}$,

$$(8)\qquad z^2-z+\frac{1}{6}=\frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{e^{2ni\pi z}}{n^2}\qquad 0\leqq z\leqq 1.$$

Ici $f(0)=f(1)=f_1(0)=f_1(1)=\frac{1}{2}[f_1(0)+f_1(1)]$; par conséquent le développement convient encore pour $z=0$ et $z=1$.

La même formule (4) donne, pour $u=0$, $\omega=1$, $f(z)=\frac{e^{2mi\pi zw}}{1-e^{2mi\pi w}}$,

$$(9)\qquad \frac{e^{2mi\pi zw}}{1-e^{2mi\pi w}}=\frac{1}{2i\pi}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{e^{2ni\pi z}}{n-mw}\qquad 0<z<1.$$

Ici $f(0)\neq f(1)$, donc le développement ne convient plus pour $z=0$, $z=1$.

La formule (7) donne, pour le cas d'une seule variable,

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\int_u^{u+h\omega} f(v)e^{\frac{2ni\pi(u-v)}{\omega}}\frac{dv}{\omega} = \frac{1}{2}f(u)+f(u+\omega)+f(u+2\omega)+\ldots$$
$$+f[u+(h-1)\omega]+\frac{1}{2}f(u+h\omega) \text{ [1]},$$

---

[1] Cette formule, appliquée au cas où $f(v) = v^p$ (p entier positif), donne

$$u^p+(u+\omega)^p+\ldots+(u+h\omega)^p$$
$$=\frac{1}{2}[u^p+(u+h\omega)^p]+\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{2ni\pi u}{\omega}}\int_u^{u+h\omega} v^p e^{-\frac{2ni\pi v}{\omega}}\frac{dv}{\omega}.$$

Posons

$$e^{\frac{2ni\pi u}{\omega}}\int_u^{u+h\omega} v^p e^{-\frac{2ni\pi v}{\omega}}\frac{dv}{\omega} = \mathrm{I}_{n,p} = e^{\frac{2ni\pi u}{\omega}}\left(-\frac{v^p e^{-\frac{2ni\pi v}{\omega}}}{2ni\pi}\right)_u^{u+h\omega}+\frac{p\omega}{2ni\pi}\mathrm{I}_{n,p-1};$$

on aura

$$\mathrm{I}_{n,p}=\frac{u^p-(u+h\omega)^p}{2ni\pi}+\frac{p\omega}{2ni\pi}\mathrm{I}_{n,p-1};$$

de même

$$\mathrm{I}_{n,p-1}=\frac{u^{p-1}-(u+h\omega)^{p-1}}{2ni\pi}+\frac{(p-1)\omega}{2ni\pi}\mathrm{I}_{n,p-2},$$

. . . . ;

finalement

$$\mathrm{I}_{n,1}=\frac{u-(u+h\omega)}{2ni\pi}.$$

On tire de là

$$\mathrm{I}_{n,p}=\sum_{k=0}^{k=p-1}\frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{2ni\pi}[u^{p-k}-(u+h\omega)^{p-k}]\left(\frac{\omega}{2ni\pi}\right)^k,$$
$$[p(p-1)\ldots(p-0+1)=1].$$

Donc

$$(a)\quad\left\{\begin{aligned}&u^p+(u+\omega)^p+\ldots+(u+h\omega)^p=\frac{1}{2}[u^p+(u+h\omega)^p]\\&+\sum_{k=0}^{k=p-1}\frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{2i\pi}[u^{p-k}-(u+h\omega)^{p-k}]\left(\frac{\omega}{2i\pi}\right)^k\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{1}{n^{k+1}},\end{aligned}\right.$$

et l'on peut négliger les termes où $k+1$ est impair. Une hypothèse particulière, par exemple $u=0, \omega=h=1$, donne, pour calculer les séries $\sum_{n=+\infty}^{n=+\infty}\frac{1}{n^{k+1}}$ par ré-

et pour $u = 0$, $\omega = 1$,

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \int_0^h f(v) e^{-2ni\pi v}\, dv &= \frac{1}{2} f(0) + f(1) + f(2) + \ldots \\ &\quad + f(h-1) + \frac{1}{2} f(h), \end{aligned} \right.$$

formule déjà trouvée par Dirichlet ([1]).

§ 2. Symbole de Legendre. Son extension par Jacobi et Kronecker.

On sait qu'il y a $\frac{p-1}{2}$ restes et $\frac{p-1}{2}$ non-restes quadratiques d'un nombre premier impair p, que le produit d'un reste par un non-reste est un non-reste, que le produit de deux restes ou de deux non-restes est un reste ([2]).

Legendre le premier ([3]) a eu l'idée de représenter par le symbole $\left(\frac{m}{p}\right)$ l'unité positive ou négative, selon que m, premier à p, est reste ou non-reste de p. De là résultent les égalités

$$\left(\frac{m}{1}\right) = +1, \qquad \left(\frac{m}{p}\right) = \left(\frac{m}{-p}\right), \qquad \left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{m}{p}\right) = +1,$$

$$\left(\frac{mnl\ldots}{p}\right) = \left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{n}{p}\right)\left(\frac{l}{p}\right)\cdots,$$

$$\left(\frac{m}{p}\right) = \left(\frac{m'}{p}\right), \qquad \text{si} \qquad m \equiv m' \pmod{p}.$$

---

currence, l'identité

$$\sum_{k=0}^{k=p-1} \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{(2i\pi)^{k+1}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{n^{k+1}} + \frac{1}{2} = 0.$$

$$[p(p-1)\ldots(p-0+1) = 1].$$

Connaissant une fois pour toutes les valeurs de ces séries $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{n^{k+1}}$, on aura par ($a$) une expression achevée de la somme des puissances semblables, entières et positives des termes d'une progression arithmétique [Comparer PUISEUX, *Sur les sommes des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique* (*Journal de Liouville*, 1846)].

([1]) *Sommation des séries par les intégrales définies* (*Journal de Crelle*, t. 17; 1837) et *Recherches sur diverses applications de l'Analyse à la théorie des nombres*, § 9 (*Journal de Crelle*, t. 21; 1840).

([2]) Voir, par exemple, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, § 33.

([3]) *Essai sur la théorie des nombres*, 1re édition, p. 186; 1798.

Jacobi (¹) a étendu la signification de ce symbole au cas où p est remplacé par un nombre impair quelconque, premier à m, au moyen de la définition

$$\left(\frac{m}{P}\right) = \left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{m}{p'}\right)\left(\frac{m}{p''}\right)\cdots,$$
$$P = pp'p''\ldots,$$

p, p', p'' étant les facteurs premiers de P, non nécessairement tous distincts. De là résultent les égalités suivantes

$$\left(\frac{m}{P}\right)\left(\frac{m}{Q}\right) = \left(\frac{m}{PQ}\right),$$

(P, Q premiers impairs, et m premier à PQ)

$$\left(\frac{m}{P}\right) = \left(\frac{m}{-1}\right)\left(\frac{m}{P}\right) = \left(\frac{m}{-P}\right) \text{(²)},$$

$$\left(\frac{l}{P}\right)\left(\frac{m}{P}\right)\left(\frac{n}{P}\right) = \ldots = \left(\frac{lmn\ldots}{P}\right),$$

$$\left(\frac{m}{P}\right) = \left(\frac{m'}{P}\right), \quad \text{si} \quad m \equiv m' \pmod{P}.$$

On remarquera que, si P est reste quadratique de m, $\left(\frac{m}{P}\right) = +1$, mais non réciproquement.

Kronecker (³) ajoute aux conventions de Jacobi les suivantes, qui donnent à la signification du symbole $\left(\frac{a}{b}\right)$ toute l'extension désirable,

$$\left(\frac{a}{b}\right) = 0$$

quand a et b ont un diviseur commun (⁴),

$$\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{2^g}{a}\right)\left(\frac{a}{b'}\right)$$

(¹) *Monatsberichte der Berliner Akademie*, 1837; *Journal de Crelle*, t. 30. M. Dideking avait déjà employé cette généralisation du symbole de Legendre, mais avec une autre notation, dans la troisième édition des *Vorlesungen über Zahlentheorie*, § 180.

(²) Dirichlet présente l'égalité $\left(\frac{m}{P}\right) = \left(\frac{m}{-P}\right)$ comme une convention (*Vorlesungen über Zahlentheorie*, § 46). Elle m'a semblé contenue, comme une conséquence nécessaire, dans la définition de Legendre.

(³) Kronecker, art. VIII (*Sitzungsberichte*, p. 770; 1885).

(⁴) Cette convention avait déjà été employée avant Kronecker, mais non, ce semble, formulée dès l'abord comme partie de la définition (*Vorlesungen über Zahlentheorie*, § 46, § 116).

quand $b = 2^g b'$ et $b' \equiv 1 \pmod 2$ (¹), et l'on a encore

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a_1}{b}\right) = \left(\frac{aa_1}{b}\right),$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b_1}\right) = \left(\frac{a}{bb_1}\right).$$

Si a est reste de b' et $\equiv \pm 1 \pmod 8$, $\left(\frac{a}{b}\right)$ sera positif, mais non réciproquement (²).

§ 3. Calcul des sommes $\varphi(h,n) = \sum_{s=1}^{s=n} e^{s^2 \frac{2\pi i h}{n}}$. Théorème de réciprocité.

Gauss, le premier (³), a considéré les sommes du type

$$\sum_s e^{s^2 \frac{2\pi i h}{n}} = \varphi(h, n),$$

où s parcourt un système de restes $(\operatorname{mod} n)$ et où h est premier à n (le cas où h et n ont un diviseur commun se ramenant de suite à celui-là). Le calcul de ces sommes, tel qu'il l'a effectué par des procédés tout algébriques, est fort remarquable, mais long. Dirichlet y est revenu deux fois (⁴) : après avoir déterminé $\varphi(1, n)$ par la

---

(¹) Le sens donné par Kronecker au symbole $\left(\frac{m}{2}\right)$ n'a donc aucun rapport avec l'idée première de Legendre d'après laquelle $\left(\frac{m}{2}\right)$ serait toujours égal à $+1$, puisque tout nombre impair $\equiv 1^2 \pmod 2$. Il n'est peut-être pas inutile de signaler cette conséquence des définitions de Kronecker, que $\left(\frac{a}{0}\right) = \left(\frac{0}{a}\right) = 0$, si $a \neq 1$, et que $\left(\frac{\pm 1}{0}\right) = \left(\frac{0}{\pm 1}\right) = 1$, car 0 doit être regardé comme admettant les diviseurs de a et de même comme premier à 1 (voir § 5, début).

(²) Voir le § 3. Évidemment, si $g \equiv 0 \pmod 2$, il suffit que a soit reste de b pour que $\left(\frac{a}{b}\right) = +1$.

(³) *Disq.*, art. 356, et surtout *Summatio quarumdam serierum singularium* (*Œuvres*, t. II).

(⁴) *Sur l'usage des intégrales définies dans la sommation des séries finies ou infinies* (*Journal de Crelle*, t. 17; 1837); *Recherches sur diverses applications de l'Analyse à la théorie des nombres*, § 9 (*Journal de Crelle*, t. 21; 1841). Ces Mémoires sont réunis dans les *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 3ᵉ édition, supplément I.

série de Fourier, il se sert d'un théorème de Gauss ([1]) pour en déduire $\varphi(h, p)$ quand p est premier.

La forme donnée à la série de Fourier au § 1 rendra ce calcul plus naturel et plus simple. Je compléterai ensuite les recherches de Dirichlet en les coordonnant avec celle de Gauss pour arriver à une expression unique et générale des sommes $\varphi(h, n)$; le théorème de réciprocité se présentera en même temps dans toute sa généralité.

Les sommes $\varphi(h, n)$ ont les propriétés suivantes :

(1) $\varphi(-h, -n) = \varphi(h, n), \qquad \varphi(h, -n) = \varphi(-h, n) = \varphi_0(h, n)$ ([2])

$$(\varphi\varphi_0 = |\varphi|),$$

(2) $\varphi(h, n) = \varphi(h_1, n)$, si $h \equiv h_1 \pmod{n}$,

(3) $\varphi(ha^2, n) = \varphi(h, n)$, si a est premier à n,

(4) $\varphi(hm, n)\varphi(hn, m) = \varphi(h, mn)$ ([3]).

La première et la seconde propriété sont évidentes.

La troisième résulte de ce que $\varphi(ha^2, n) = \sum_s e^{a^2 s^2 \frac{2h\pi i}{n}}$ et que as parcourt en même temps que s un système de restes.

Nous pourrons donc supposer le premier argument inférieur au second en valeur absolue et sans diviseur carré.

La quatrième propriété se démontre comme il suit. Des défini-

---

([1]) *Summatio quarumdam serierum singularium*, § 25. Ce théorème est exprimé dans la formule (5) du texte; la démonstration de Gauss est différente.

([2]) Cette remarque si simple de Dirichlet semble avoir échappé à Gauss. Voir *Summatio*, § 35.

([3]) *A priori*, h, m, n peuvent être positifs ou négatifs, car de la formule (4) on déduit, en changeant partout i en $-i$,

$$\varphi[(-h)m, n]\,\varphi[(-h)n, m] = \varphi(-h, mn),$$
$$\varphi[h(-m), n]\,\varphi(hn, -m) = \varphi[h, (-m)n],$$
$$\varphi(hm, -n)\,\varphi[h(-n), m] = \varphi[h, m(-n)],$$
$$\varphi[(-h)(-m), -n]\,\varphi[(-h)(-n), -m] = \varphi[-h, (-m)(-n)],$$

et, sans rien changer,

$$\varphi[h(-m), -n]\,\varphi[h(-n), -m] = \varphi[h, (-m)(-n)].$$
$$\varphi[(-h)(-m), n]\,\varphi[(-h)n, -m] = \varphi[-h, (-m)n].$$

Cela résultera d'ailleurs de la démonstration.

tions

$$\varphi(hm, n) = \sum_s e^{s^2 \frac{2hm\pi i}{n}}, \qquad \varphi(hn, m) = \sum_t e^{t^2 \frac{2hn\pi i}{m}},$$

où s, t parcourent respectivement des systèmes de restes selon les modules b et c, résulte

$$\varphi(hm, n)\,\varphi(hn, m) = \sum_{s,t} e^{\left(\frac{ms^2}{n} + \frac{nt^2}{m}\right) 2h\pi i} = \sum_{s,t} e^{\left[\frac{(ms+nt)^2}{mn} - 2st\right] 2h\pi i}$$

$$= \sum_{s,t} e^{(ms+nt)^2 \frac{2h\pi i}{mn}} = \sum_r e^{r^2 \frac{2h\pi i}{mn}},$$

r parcourant un système de restes (mod mn); car $ms + nt$ prend mn valeurs et ces valeurs sont incongrues (mod mn), la congruence

$$ms + nt \equiv ms' + nt' \pmod{mn}$$

entraînant $ms \equiv ms' \pmod n$, $nt \equiv nt' \pmod m$ et, par suite, $s = s'$, $t = t'$.

La propriété (4) donne lieu à la généralisation suivante

$$(5) \qquad \prod_i \varphi(hA_i, a_i) = \varphi(h, n), \qquad n = \prod_i a_i = A_i a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, \lambda),$$

les nombres h, a_i étant premiers entre eux deux à deux, > 0 ou < 0. En effet, on a d'abord

$$\varphi(hA_1, a_1)\,\varphi(ha_1, A_1) = \varphi(h, n),$$

puis

$$\varphi(ha_1, A_1) = \varphi\left(ha_1 a_2, \frac{A_1}{a_2}\right) \varphi\left(ha_1 \frac{A_1}{a_2}, a_2\right) = \varphi\left(ha_1 a_2, \frac{A_1}{a_2}\right) \varphi(hA_2, a_2),$$

puis

$$\varphi\left(ha_1 a_2, \frac{A_1}{a_2}\right) = \varphi\left(ha_1 a_2 a_3, \frac{A_1}{a_2 a_3}\right) \varphi\left(ha_1 a_2 \frac{A_1}{a_2 a_3}, a_3\right)$$

$$= \varphi\left(ha_1 a_2 a_3, \frac{A_1}{a_2 a_3}\right) \varphi(hA_3, a_3),$$

. . . .

Dans ce qui suit, α, α', α_k désigneront des entiers > 0; ε l'unité prise avec un signe arbitraire, p, p_k des nombres premiers impairs *positifs*; h sera toujours supposé premier à n.

Je poserai avec Kronecker

$$\operatorname{sgn} x = \frac{|x|}{x} \quad \text{pour} \quad x \neq 0, \quad \operatorname{sgn} 0 = 0 \ (^1),$$

et

$$(10) \qquad (\sqrt{re^{2i\theta}}) = |\sqrt{r}|e^{i\theta}, \quad r > 0, \quad -\pi < 2\theta \leqq +\pi,$$

d'où, en particulier,

$$(\sqrt{a}) = |\sqrt{a}|, \quad \text{si} \quad a > 0,$$
$$(\sqrt{a}) = i|\sqrt{a}|, \quad \text{si} \quad a < 0.$$

Voici enfin deux transformations utiles que l'on vérifie aisément en faisant les deux hypothèses $q \equiv \pm 1 \pmod 4$

$$(\text{A}) \qquad i^{\operatorname{sgn} q\left(\frac{|q|-1}{2}\right)^2} |\sqrt{q}| = i^{-q\left(\frac{q-1}{2}\right)^2} (\sqrt{q}) \operatorname{sgn} q,$$

$$(\text{B}) \qquad i^{-\left(\frac{q-1}{2}\right)^2 - \frac{(q-1)(q'-1)}{2}} = i^{-q'\left(\frac{q-1}{2}\right)^2}.$$

(q, q' impairs)

Distinguons maintenant quatre cas.

Premier cas. $h = 1$. — Soit d'abord $n \equiv 0 \pmod 4$ et > 0, $n = 4\nu$. Dans la formule

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \int_0^k f(v) e^{-2mi\pi v} \, dv = \frac{1}{2}[f(0) + f(k)] + f(1) + f(2) + \ldots + f(k-1),$$

démontrée précédemment [§ 1, (10)], prenons

$$f(v) = e^{\frac{2i\pi}{4\nu} v^2}, \qquad k = 2\nu > 0.$$

Le second membre devient, puisque $\frac{1}{2}[f(0) + f(k)]$ est ici égal à $f(0)$

$$1 + e^{\frac{2i\pi}{4\nu} 1^2} + e^{\frac{2i\pi}{4\nu} 2^2} + \ldots + e^{\frac{2i\pi}{4\nu} (2\nu - 1)^2},$$

(¹) Voir KRONECKER, *Sitzungsberichte*, p. 519; 1884. On voit que $\operatorname{sgn} x$ est la *fonction substituée* à $\frac{|x|}{x}$ (§ 1); cette fonction peut se représenter analytiquement par l'intégrale

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin tx}{t} \, dt.$$

somme égale terme à terme à

$$e^{\frac{2i\pi}{4\nu}(2\nu)^2} + e^{\frac{2i\pi}{4\nu}(2\nu+1)^2} + \ldots + e^{\frac{2i\pi}{4\nu}(2\nu+2\nu-1)^2},$$

et, par conséquent, à

$$\frac{1}{2}\sum_s e^{\frac{2i\pi}{4\nu}s^2} = \frac{1}{2}\varphi(1, 4\nu).$$

Le premier membre devient, en posant $v = 2m\nu - x$

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \int_{2\nu(m-1)}^{2\nu m} e^{\frac{2i\pi}{4\nu}(x^2 - 4m\nu x + 4m^2\nu^2) - 2mi\pi(2m\nu - x)}\, dx,$$

ou

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \int_{2\nu(m-1)}^{2\nu m} e^{\frac{2i\pi}{4\nu}x^2}\, dx = \sqrt{\frac{2\nu}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy^2}\, dy = \sqrt{\frac{2\nu}{\pi}}\, \mathrm{I},$$

si l'on fait

$$x\sqrt{\frac{\pi}{2\nu}} = y, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy^2}\, dy = \mathrm{I}.$$

Ainsi, on a

$$(6) \qquad \sqrt{\frac{2\nu}{\pi}}\, \mathrm{I} = \frac{1}{2}\varphi(1, 4\nu).$$

On sait d'ailleurs calculer l'intégrale I; mais, puisqu'elle est indépendante de ν, l'égalité précédente suffit pour déterminer à la fois I et $\varphi(1, 4\nu)$ au moyen d'une hypothèse particulière. On a, en effet, directement, pour $\nu = 1$,

$$(7) \qquad \varphi(1, 4) = 2(1 + i)$$

et, par conséquent,

$$(8) \qquad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \mathrm{I} = 1 + i.$$

Les égalités (6) et (8) déterminent I et $\varphi(1, 4\nu)$:

$$\mathrm{I} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1 + i) = \sqrt{\pi}\, e^{\frac{\pi i}{4}},$$

$$(9) \qquad \varphi(1, 4\nu) = (1 + i)\left|\sqrt{4\nu}\right| \qquad (\nu \text{ entier positif quelconque}).$$

Soit maintenant $n \equiv 2 \pmod 4$ et > 0, $n = 2n'$. La formule (4)

donne, pour $h = 1$, $m = 2$, si l'on y remplace n par n',

$$\varphi(2, n')\varphi(n', 2) = \varphi(1, 2n').$$

Or on voit directement que $\varphi(n', 2) = 0$. Donc

$$\varphi(1, 2n') = 0 \qquad (n' \text{ impair} > 0).$$

Soit enfin n impair et > 0. La formule (4) donne, pour $h = 1$, $m = 4$, si l'on y remplace n par n',

$$\varphi(4, n')\varphi(n', 4) = \varphi(1, 4n');$$

or, d'après (3), (9),

$$\varphi(4, n') = \varphi(1, n'),$$
$$\varphi(1, 4n') = (1 + i)|\sqrt{4n'}|,$$

et le calcul direct donne

$$(10) \qquad \varphi(n', 4) = 2(1 + i^{n'}).$$

Donc

$$\varphi(1, n') = \frac{1 + i}{1 + i^{n'}}|\sqrt{n'}|.$$

En faisant les deux hypothèses $n' \equiv +1 \pmod 4$, $n' \equiv -1 \pmod 4$, on voit que la formule précédente peut s'écrire

$$(11) \qquad \varphi(1, n') = i^{\left(\frac{n'-1}{2}\right)^2}|\sqrt{n'}| \qquad (n' \text{ impair} > 0).$$

On a donc, en réunissant les résultats obtenus et en tenant compte de la propriété (1),

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(1, 2^\alpha n') &= (1 + i\,\mathrm{sgn}\, n')|\sqrt{2^\alpha n'}| \\ &= (1 + i)(\sqrt{2^\alpha n'})\,\mathrm{sgn}\, n', \\ \varphi(1, 2n') &= 0, \\ \varphi(1, n') &= i^{\mathrm{sgn}\, n'\left(\frac{|n'|-1}{2}\right)^2}|\sqrt{n'}| \\ &= i^{-n'\left(\frac{n'-1}{2}\right)^2}(\sqrt{n'})\,\mathrm{sgn}\, n'. \end{aligned} \right. \qquad \begin{aligned} &\alpha \text{ entier} \geqq 2, \\ &n' \text{ impair} > 0 \text{ ou} < 0, \end{aligned}$$

Deuxième cas. $n = p$ *et* $p \neq 2$. — Désignons par α les $\frac{p-1}{2}$ restes quadratiques de p, par β les $\frac{p-1}{2}$ non restes. On aura

$$\varphi(h, p) = \sum_s e^{s^2\frac{2h\pi i}{p}} = 1 + 2\sum_\alpha e^{\alpha\frac{2h\pi i}{p}}.$$

Or, la somme des racines de $x^p - 1 = 0$ étant nulle, on peut écrire

$$0 = \sum_s e^{s\frac{2h\pi i}{p}} = 1 + \sum_\alpha e^{\alpha\frac{2h\pi i}{p}} + \sum_\beta e^{\beta\frac{2h\pi i}{p}}.$$

Donc

$$\varphi(h, p) = \sum_\alpha e^{\alpha\frac{2h\pi i}{p}} - \sum_\beta e^{\beta\frac{2h\pi i}{p}}$$

$$= \sum_s \left(\frac{s}{p}\right) e^{s\frac{2h\pi i}{p}} = \left(\frac{h}{p}\right) \sum_{hs} \left(\frac{hs}{p}\right) e^{hs\frac{2\pi i}{p}} = \left(\frac{h}{p}\right) \varphi(1, p),$$

(13) $$\varphi(h, p) = \left(\frac{h}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} |\sqrt{p}| \text{ (1)}.$$

Troisième cas. $n = p^\alpha$, $p \neq 2$. — Partons de

(14) $$\varphi(h, p^\alpha)\varphi(p^\alpha, h) = \varphi(1, hp^\alpha),$$

qui se déduit de (4) quand on y remplace h, m, n respectivement par 1, h, p^α.

Soit d'abord h impair $= h' > 0$ *ou* < 0. Si α est pair, $\varphi(p^\alpha, h') = \varphi(1, h')$, et (14) suffit pour donner (2)

$$\varphi(h', p^\alpha) = \frac{i^{-h'\left(\frac{h'p^\alpha - 1}{2}\right)^2}(\sqrt{h'p^\alpha})}{i^{-h'\left(\frac{h'-1}{2}\right)^2}(\sqrt{h'})}$$

$$= i^{-h'\left[\left(\frac{h'-1}{2} + \frac{p^\alpha - 1}{2}\right)^2 - \left(\frac{h'-1}{2}\right)^2\right]} |\sqrt{p^\alpha}| = |\sqrt{p^\alpha}|.$$

---

(1) A la simple inspection de cette formule, on peut trouver la valeur de $\left(\frac{-1}{p}\right)$. D'après (1), en effet, quand h change de signe, si le second membre est purement imaginaire, donc $p \equiv 1 \pmod 4$, il doit changer de signe, et s'il est réel, donc $p \equiv -1 \pmod 4$, il doit conserver son signe. Donc $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$. Mais ce résultat viendra mieux tout à l'heure. KRONECKER a déterminé $\varphi(h, p)$ au moyen du théorème de Cauchy (*Journal de Crelle*, t. 105, p. 267).

(2) Soit $A = \Pi a_i$, les a_i étant impairs > 0 ou < 0. On peut écrire

$$A = \prod_i (1 + \overline{a_i - 1}).$$

Alors

$$A \equiv 1 + \sum_i (a_i - 1) \pmod 4,$$

Si α est impair, il faut joindre à (14) l'égalité semblable où $\alpha = 1$

$$(15) \qquad \varphi(h', p)\,\varphi(p, h') = \varphi(1, h'p),$$

afin de pouvoir éliminer $\varphi(p^\alpha, h') = \varphi(p, h')$ par division, ce qui donne

$$\varphi(h', p^\alpha) = \frac{i^{-h'\left(\frac{h'p^\alpha-1}{2}\right)^2}\left(\sqrt{h'p^\alpha}\right)\left(\frac{h'}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} |\sqrt{p}|}{i^{-h'\left(\frac{h'p-1}{2}\right)^2}\left(\sqrt{h'p}\right)}$$

$$= \left(\frac{h'}{p}\right) i^{-h'\left[\left(\frac{h'-1}{2}+\frac{p^\alpha-1}{2}\right)^2-\left(\frac{h'-1}{2}+\frac{p-1}{2}\right)^2\right]+\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} |\sqrt{p^\alpha}|,$$

$$(16) \qquad \varphi(h', p^\alpha) = \left(\frac{h'}{p^\alpha}\right) i^{\left(\frac{p^\alpha-1}{2}\right)^2} |\sqrt{p^\alpha}|,$$

qui convient aussi au cas où α est pair.

Soit h pair $= 2^{\alpha'}h'$. On aura

$$\varphi(2^{\alpha'}h', p^\alpha) = \varphi(p^\alpha + 2^{\alpha'}h', p^\alpha) = \left(\frac{p^\alpha + 2^{\alpha'}h'}{p^\alpha}\right) i^{\left(\frac{p^\alpha-1}{2}\right)^2} |\sqrt{p^\alpha}|.$$

Donc, d'après (16), que h soit pair ou impair, on aura

$$(17) \qquad \varphi(h, p^\alpha) = \left(\frac{h}{p^\alpha}\right) i^{\left(\frac{p^\alpha-1}{2}\right)^2} |\sqrt{p^\alpha}| \qquad (h > 0 \text{ ou } < 0).$$

Quatrième cas. $n = 2^\alpha$, donc h impair $= h' > 0$ ou < 0. — Il convient ici d'avoir sous les yeux l'égalité

$$(\mathrm{C}) \qquad e^{\frac{h'\pi i}{4}} = e^{\frac{\pi i}{4}} e^{-\frac{\pi i}{2}\left(\frac{h'-1}{2}\right)^2} e^{\pi i \frac{h'^2-1}{8}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\, i^{-\left(\frac{h'-1}{2}\right)^2} (-1)^{\frac{h'^2-1}{8}},$$

---

et

$$\frac{A-1}{2} \equiv \sum_i \frac{a_i-1}{2} \qquad (\mathrm{mod}\ 2),$$

$$\left(\frac{A-1}{2}\right)^2 \equiv \left(\sum_i \frac{a_i-1}{2}\right)^2 \qquad (\mathrm{mod}\ 4).$$

Cette congruence qui donne ici $i^{\left(\frac{h'p^\alpha-1}{2}\right)^2} = i^{\left(\frac{h'-1}{2}+\frac{p^\alpha-1}{2}\right)^2}$ servira encore plusieurs fois.

On aura de même, en remplaçant A, a_i par A^2, a_i^2 qui sont $\equiv +1$ (mod 8),

$$\frac{A^2-1}{8} \equiv \sum_i \frac{a_i^2-1}{8} \qquad (\mathrm{mod}\ 8).$$

qui montre, en particulier, que la quantité $(1+i)i^{-\left(\frac{h'-1}{2}\right)^2}$ se change en sa conjuguée quand h change de signe.

Si α est pair, on obtient comme précédemment la formule suivante, qui, établie pour $h'>0$, subsiste, d'après (C), pour $h'<0$:

$$\varphi(h', 2^\alpha) = (1+i)\, i^{-\left(\frac{h'-1}{2}\right)^2} |\sqrt{2^\alpha}|.$$

Si α est impair, il faut joindre à (14) l'égalité semblable où $\alpha = 3$ [pour $\alpha = 1$, $\varphi(h', 2)$ étant nul ainsi que $\varphi(1, 2h')$, on n'obtiendrait rien par l'égalité (15)]

$$\varphi(h', 2^3)\,\varphi(2^3, h') = \varphi(1, 2^3 h').$$

La division élimine $\varphi(2^3, h') = \varphi(2^\alpha, h')$ et donne

$$\frac{\varphi(h', 2^\alpha)}{\varphi(h', 2^3)} = \frac{\varphi(1, 2^\alpha h')}{\varphi(1, 2^3 h')}.$$

Un calcul direct fournit

$$\varphi(h', 2^3) = 4 e^{\frac{h'\pi i}{4}},$$

et l'on obtient, par la formule précédente,

$$\varphi(h', 2^\alpha) = 2^{\frac{\alpha+1}{2}} e^{\frac{h'\pi i}{4}}.$$

Donc, en tenant compte de (C), on aura, quel que soit α,

$$\varphi(h', 2^\alpha) = (1+i)\, i^{-\left(\frac{h'-1}{2}\right)^2} (-1)^{\alpha\frac{h'^2-1}{8}} |\sqrt{2^\alpha}|,$$

et, d'après (1) et (C),

$$(18) \qquad \varphi'(h', \varepsilon 2^\alpha) = (1+i)\, i^{-\left(\frac{\varepsilon h'-1}{2}\right)^2} (-1)^{\alpha\frac{h'^2-1}{8}} |\sqrt{2^\alpha}|.$$

Cinquième cas. h, n quelconques. — Portons les résultats précédents dans la formule (5), en posant

$$n = \varepsilon 2^\alpha \prod_k p_k^{\alpha_k} = \varepsilon 2^\alpha n',$$

$$k = 1, 2, \ldots, \mu, \qquad \mu + 1 = \lambda, \qquad p_k^{\alpha_k} = a_k, \qquad \varepsilon 2^\alpha = a_\lambda, \qquad n' = A_\lambda,$$

donc

$$n = \prod_i a_i = A_i a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, \lambda),$$

Soit d'abord $\alpha \neq 0$, donc h impair $= h'$. On aura, si $\alpha = 1$,

(19) $$\varphi(h', \varepsilon 2 n') = 0;$$

si $\alpha > 1$

(20) $$\varphi(h', \varepsilon 2^\alpha n') = \left(\frac{h'}{n'}\right) \prod_k \left(\frac{A_k}{a_k}\right) (-1)^{\alpha \frac{h'^2 n'^2 - 1}{8}} i^{\Sigma_k \left(\frac{a_k - 1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\varepsilon h' n' - 1}{2}\right)^2} (1 + i) \left|\sqrt{2^\alpha n'}\right|,$$

d'où, pour $h' = 1$, d'après (12),

(21) $$1 = \prod_k \left(\frac{A_k}{a_k}\right) i^{\Sigma_k \left(\frac{a_k - 1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\varepsilon n' - 1}{2}\right)^2} (-1)^{\alpha \frac{n'^2 - 1}{8}},$$

et, par conséquent

(22) $$\varphi(h', 2^\alpha n') = \left(\frac{h'}{n'}\right) (-1)^{\alpha \frac{h'^2 - 1}{8}} i^{-\left(\frac{h' - 1}{2}\right)^2 - \frac{(h' - 1)(n' - 1)}{2}} (1 + i) \left|\sqrt{2^\alpha n}\right|.$$

Soit maintenant $\alpha = 0$. On aura de même

$$\varphi(h, n') = \left(\frac{h}{n'}\right) \prod_k \left(\frac{A_k}{a_k}\right) i^{\Sigma_k \left(\frac{a_k - 1}{2}\right)^2} \left|\sqrt{n'}\right|,$$

d'où, pour $h' = 1$, d'après (12),

(23) $$i^{\left(\frac{n' - 1}{2}\right)^2} = \prod_k \left(\frac{A_k}{a_k}\right) i^{\Sigma_k \left(\frac{a_k - 1}{2}\right)^2}.$$

et, par conséquent,

(24) $$\varphi(h, n') = \left(\frac{h}{n'}\right) i^{\left(\frac{n' - 1}{2}\right)^2} \left|\sqrt{n'}\right|.$$

Remarquons que (21) contient (23), car, dans (21), pour $\alpha \equiv 0 \pmod 2$, 2^α disparaît de tous les symboles. Ainsi (21) nous suffit. Prenons-y $\alpha = 2$, $\mu = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\varepsilon = 1$; il vient

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right) \left(\frac{p_2}{p_1}\right) = (-1)^{\frac{p_1 - 1}{2} \frac{p_2 - 1}{2}}.$$

La même formule donne, pour $\alpha = 2$, $\mu = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\varepsilon = -1$,

$$\left(\frac{-1}{p_1}\right) = (-1)^{\frac{p_1 - 1}{2}},$$

et, pour $\alpha = 3$, $\mu = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\varepsilon = 1$,

$$\left(\frac{2}{p_1}\right) = (-1)^{\frac{p_1^2-1}{8}}.$$

De ces formules on déduit, d'après la définition du symbole de Jacobi, en se servant des congruences établies dans une note précédente,

$$\left(\frac{P}{Q}\right)\left(\frac{Q}{P}\right) = (-1)^{\frac{P-1}{2}\,\frac{Q-1}{2}}, \qquad \left(\frac{-1}{M}\right) = (-1)^{\frac{M-1}{2}}, \qquad \left(\frac{2}{N}\right) = (-1)^{\frac{N^2-1}{8}}$$

(M, N, P, Q positifs, impairs; P, Q premiers entre eux)

et, d'après celle du symbole de Kronecker, en multipliant $\left(\frac{P}{Q}\right)\left(\frac{Q}{P}\right)$ par $\left(\frac{2^\alpha}{P}\right)\left(\frac{2^\alpha}{P}\right) = 1$,

$$(25)\quad \begin{cases} \left(\frac{A}{B}\right) = \left(\frac{B}{A}\right)(-1)^{\frac{A'-1}{2}\,\frac{B'-1}{2}}, \\ \left(\frac{-1}{C}\right) = (-1)^{\frac{C'-1}{2}}, \qquad \left(\frac{2}{D}\right) = (-1)^{\frac{D'^2-1}{8}} \sin^2\frac{D\pi}{2} \end{cases}$$

(A, B, C, D sont des entiers quelconques > 0; A′, B′, C′, D′ sont leurs plus grands diviseurs impairs; AA′, BB′, CC′ sont > 0).

Il est facile de voir (¹) que la première de ces formules subsiste si l'on suppose A ou B négatif, et que les deux premières formules sont *toujours fausses* si A, B, C sont tous trois négatifs. On aura donc les formules suivantes absolument générales

$$(26)\quad \begin{cases} \left(\frac{A}{B}\right) = \left(\frac{B}{A}\right)(-1)^{\frac{A'-1}{2}\,\frac{B'-1}{2} + \frac{\operatorname{sgn} A-1}{2}\,\frac{\operatorname{sgn} B-1}{2}}, \\ \left(\frac{-1}{C}\right) = (-1)^{\frac{C'-1}{2} + \frac{\operatorname{sgn} C-1}{2}} = (-1)^{\frac{|C'|-1}{2}} = (-1)^{\frac{C'-1}{2}} \operatorname{sgn} C, \\ \left(\frac{2}{D}\right) = (-1)^{\frac{D'^2-1}{2}} \sin^2\frac{D\pi}{2} \end{cases}$$

(A, B, C, D sont des entiers quelconques > 0 ou < 0; A′, B′, C′, D′ sont leurs plus grands diviseurs impairs; AA′, BB′, CC′ sont > 0).

(¹) Pour la première vérification, multiplier le second membre de la première formule par $\left(\frac{-1}{A}\right)(-1)^{\frac{A'-1}{2}} = 1$; pour la seconde, multiplier le premier membre par $\left(\frac{-1}{B}\right)$, le second par $\left(\frac{-1}{A}\right)(-1)^{\frac{A'-1}{2} + \frac{B'-1}{2}}$.

Une remarque intéressante est que la valeur du symbole $\left(\frac{2}{D}\right)$ est déterminée par les deux formules précédentes. Soit P positif ou négatif de la forme $4n-1$, et $P-1=2P'$; P' sera impair, premier à P, et l'on aura

$$\left(\frac{P}{P'}\right)=\left(\frac{2P'+1}{P'}\right)=+1.$$

Donc

$$\left(\frac{P}{P'}\right)\left(\frac{P'}{P}\right)=\left(\frac{P'}{P}\right)=(-1)^{\frac{P-1}{2}\frac{P'-1}{2}+\frac{\operatorname{sgn}P-1}{2}\frac{\operatorname{sgn}P'-1}{2}}$$
$$=(-1)^{\frac{P-1}{2}\frac{P'-1}{2}+\left(\frac{\operatorname{sgn}P-1}{2}\right)^2}=(-1)^{\frac{P-1}{2}\frac{P'-1}{2}+\frac{\operatorname{sgn}P-1}{2}}.$$

Multiplions par $\left(\frac{2}{P}\right)$ en remarquant que

$$\left(\frac{2}{P}\right)\left(\frac{P'}{P}\right)=\left(\frac{P-1}{P}\right)=\left(\frac{-1}{P}\right)=(-1)^{\frac{P-1}{2}+\frac{\operatorname{sgn}P-1}{2}};$$

il viendra

$$(-1)^{\frac{P-1}{2}+\frac{\operatorname{sgn}P-1}{2}}=\left(\frac{2}{P}\right)(-1)^{\frac{P-1}{2}\frac{P'-1}{2}+\frac{\operatorname{sgn}P-1}{2}},$$

$$\left(\frac{2}{P}\right)=(-1)^{\frac{P-1}{2}\left(1+\frac{\frac{P-1}{2}-1}{2}\right)}=(-1)^{\frac{P^2-1}{8}}.$$

Comme tout nombre impair peut, au besoin, par un changement de signe, être ramené à la forme $4n-1$ et que $\left(\frac{2}{P}\right)=\left(\frac{2}{-P}\right)$, la formule précédente est exacte pour tous les nombres impairs P positifs ou négatifs.

On verrait de même que la valeur de $\left(\frac{-1}{C}\right)$ est déterminée par les deux autres formules (26).

Les deux premières formules (26) ont été établies indépendamment l'une de l'autre; mais la première donne la seconde pour $A=-1$ et, bien qu'elle devienne illusoire pour $A=2$, on vient de voir comment, à l'aide du cas $A=-1$, on en déduit la troisième. Donc, en résumé, tous les cas du théorème de récipro-

cité sont contenus dans l'unique formule suivante

$$(27)\quad \left\{\begin{array}{l} \left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\right) = \left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}\right)(-1)^{\operatorname{sgn}\mathrm{AB}\left(\frac{\mathrm{A}'-1}{2}\frac{\mathrm{B}'-1}{2}+\frac{\operatorname{sgn}\mathrm{A}'-1}{2}\frac{\operatorname{sgn}\mathrm{B}-1}{2}\right)} \text{ (1)} \\ \text{(A, B sont des entiers } > 0,\ < 0 \text{ ou } = 0;\ \mathrm{A}',\ \mathrm{B}' \text{ sont leurs} \\ \text{plus grands diviseurs impairs; } \mathrm{AA}',\ \mathrm{BB}' \text{ sont } > 0). \end{array}\right.$$

Les formules (26) permettent de simplifier encore l'expression (22) de $\varphi(h, n)$ et l'on a, en supposant maintenant que n' peut être négatif et en se servant encore de (1), (A), (B),

$$\varphi(h', 2n') = 0,$$

$$\varphi(h', 2^\alpha n') = \left(\frac{h'}{2^\alpha n'}\right) i^{-n'\left(\frac{h'-1}{2}\right)^2}(1+i)(\sqrt{2^\alpha n'}) \operatorname{sgn} n',$$

$$\varphi(h, n') = \left(\frac{h}{n'}\right) i^{-n'\left(\frac{n'-1}{2}\right)^2}(\sqrt{n'}) \operatorname{sgn} n' \qquad (h \text{ pair ou impair}),$$

ou la formule unique

$$(28)\quad \left\{\begin{array}{l} \varphi(h, n) = i^{-n'\left(\frac{n'-1}{2}\right)^2\theta(\alpha)}\left[i^{-n'\left(\frac{h'-1}{2}\right)^2}(1+i)\right]^{1-\theta(\alpha)}\left(\frac{h}{n}\right)(\sqrt{n}) \operatorname{sgn} n, \\ \theta(\alpha) = \dfrac{\operatorname{sgn}(1+\alpha)+\operatorname{sgn}(1-\alpha)}{2(1-\alpha)^2} \\ (h',\ n' \text{ sont les plus grands diviseurs impairs de } h,\ n, \text{ de même} \\ \text{signe que } h,\ n;\ n = 2^\alpha n'). \end{array}\right.$$

On déduit de là, par la formule (5), en posant

$$n = a_0 \prod_j a_j, \qquad (j = 1, 2, \ldots), \qquad \frac{n}{a_j} = \mathrm{A}_j,$$

$$\frac{n}{a_0} = \mathrm{A}_0, \qquad a_0 = 2^\alpha a'_0, \qquad a'_0 \equiv 1 \pmod 2, \qquad \alpha \geqq 0,$$

les a_j, a_0 étant premiers entre eux, positifs ou négatifs, d'ailleurs quelconques,

$$\varphi(h, n) = \left(\frac{h}{n}\right)\prod_j \left(\frac{\mathrm{A}_j}{a_j}\right) i^{\sum_j -a_j\left(\frac{a_j-1}{2}\right)^2}\left[\left(\frac{\mathrm{A}_0}{a_0}\right) i^{-a_0\left(\frac{a_0-1}{2}\right)^2}\right]^{\theta(\alpha)}$$

$$\times\left[i^{-a'_0\left(\frac{\mathrm{A}_0 h'-1}{2}\right)^2}(1+i)\right]^{1-\theta(\alpha)}(\sqrt{n}) \operatorname{sgn} n.$$

---

(1) La présence du facteur sgn AB dans l'exposant de -1, rend la formule applicable au cas où l'un des deux nombres est ± 1 et l'autre 0 [voir la note (1) de la page 12]. Ce cas échappait à la première formule (26).

La relation obtenue en égalant ces deux expressions de $\varphi(h, n)$ est la généralisation d'un théorème de Gauss ([1]).

§ 4. Remarques sur le symbole de Kronecker.

Les propositions démontrées au cours du paragraphe précédent donnent lieu à quelques observations complémentaires sur le calcul du symbole de Kronecker.

D'abord, si a et b ont un diviseur commun, on a évidemment

$$\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a + \lambda b}{b}\right) = 0 \qquad (\lambda > 0 \text{ ou } < 0).$$

Supposons a premier à b. Si b est impair, $\left(\frac{a}{b}\right)$ est le symbole de Jacobi, et l'on a vu que

$$\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a + \lambda b}{b}\right).$$

Soit maintenant $b = 2^\beta b'$, b' impair, $\beta \geq 0$, $a \equiv 1 \pmod 2$. On aura

$$\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{2^\beta}{a}\right)\left(\frac{a}{b'}\right) = \left(\frac{2^\beta}{a}\right)\left(\frac{a + \lambda b'}{b'}\right) = \left(\frac{2^\beta}{a(a + \lambda b')}\right)\left(\frac{a + \lambda b'}{b}\right).$$

Si β est pair, on a évidemment

$$\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a + \lambda b'}{b}\right).$$

---

(1) *Summatio quarumdam serierum singularium*, § 32. — M. H. Weber (*Journal de Crelle*, t. 74) et, après lui, M. C. Jordan (*Comptes rendus*, t. LXXIII, p. 1316; 1871) se sont occupés des sommes de Gauss à plusieurs variables. M. Jordan ramène très simplement le calcul de

$$\sum_{s_1, \ldots, s_p}{}_0^{n-1} e^{\frac{2\pi i}{n} f(s_1, \ldots, s_p)},$$

où f est une forme quadratique, à celui des sommes de Gauss a une variable.

J'ai rencontré une partie des calculs précédents dans les *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen* de F. Klein, t. II, p. 364. Mais le point de départ y est tout différent.

Si β est impair, prenons $\lambda \equiv 0 \pmod 8) = 8\mu$ et concluons

$$\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{2^\beta}{a(a+8\mu b')}\right)\left(\frac{a+8\mu b'}{b}\right) = \left(\frac{a+8\mu b'}{b}\right).$$

Ainsi, *dans le cas où l'on a à la fois* $b \equiv 2 \pmod 4$ *et* *a premier à b, on a*

$$\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a+4\lambda b}{b}\right) \qquad (\lambda > 0 \text{ ou } < 0);$$

dans tous les autres cas

$$\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a+\lambda b}{b}\right) \qquad (\lambda > 0 \text{ ou } < 0).$$

Convenons dès maintenant de dire qu'un nombre a la forme de discriminant quand il est $\equiv 0$ ou $\equiv 1 \pmod 4$, et la forme de discriminant fondamental quand il a une des trois formes

$$P, \quad -4P, \quad \pm 8P,$$

P étant positif ou négatif et $\equiv +1 \pmod 4$ (1).

Kronecker a énoncé (2) la proposition suivante souvent utile :

Si a a la forme de discriminant, on a

$$\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{b+\lambda a}\right) \qquad (\lambda > 0 \text{ ou } < 0),$$

pourvu que b et $b+\lambda a$ *soient positifs.*

La démonstration en est facile. Si a et b ont un diviseur commun, l'égalité subsiste évidemment, quels que soient a, b et λ. Soit donc a premier à b. Si $a \equiv +1 \pmod 4$, $b \equiv 2^\beta b'$, $b' \equiv 1 \pmod 2$, $\beta \geqq 0$, on a de suite

$$\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{b}{a}\right) = \left(\frac{b+\lambda a}{a}\right) = \left(\frac{a}{b+\lambda a}\right).$$

Si $a \equiv 0 \pmod 4) = 2^\alpha a'$, $a' \equiv 1 \pmod 2$, $\alpha \geqq 2$, $b \equiv 1 \pmod 2$, on

(1) Ces dénominations seront justifiées dans la théorie des formes quadratiques

(2) *Sitzungsberichte*, p. 776; 1885.

a encore, d'après les propositions précédentes,

$$\left(\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{b}{a}\right)(-1)^{\frac{a'-1}{2}\frac{b-1}{2}}$$
$$=\left(\frac{2^\alpha}{b}\right)\left(\frac{b}{a'}\right)(-1)^{\frac{a'-1}{2}\frac{b-1}{2}}=\left(\frac{2^\alpha}{b}\right)\left(\frac{b+\lambda'a'}{a'}\right)(-1)^{\frac{a'-1}{2}\frac{b-1}{2}}$$
$$(\lambda'>0 \text{ ou } <0;\ b+\lambda'a'>0),$$

et, si $\lambda'\equiv 0 \pmod 4$,

$$\left(\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{2^\alpha}{b}\right)\left(\frac{a'}{b+\lambda'a'}\right)(-1)^{\frac{a'-1}{2}\left(\frac{b-1}{2}+\frac{\lambda'a'+b-1}{2}\right)}$$
$$=\left(\frac{2^\alpha}{b}\right)\left(\frac{a'}{b+\lambda'a'}\right)$$
$$=\left(\frac{2^\alpha}{b(b+\lambda'a')}\right)\left(\frac{a}{b+\lambda'a'}\right),\qquad \lambda'\equiv 0 \pmod 4.$$

Si α est pair, le premier facteur se réduira à l'unité, et, en prenant $\lambda'\equiv 0 \pmod{2^\alpha}$, $b+\lambda'a'$ sera de la forme $b+\lambda a>0$.

Si α est impair, donc $\geqq 3$, puisque a a la forme de discriminant, en prenant $\lambda'\equiv 0 \pmod 8$, on aura

$$b(b+\lambda'a')\equiv b^2\equiv 1 \pmod 8,$$

et le premier facteur se réduira encore à l'unité; en prenant $\lambda'\equiv 0(\bmod 2^\alpha)$, $b+\lambda'a'$ sera de la forme $b+\lambda a>0$. Dans les deux cas, le théorème est établi.

On voit par cette démonstration que, si a est positif, ou, si a est négatif et $b(b+\lambda a)>0$, on aura, quels que soient les signes de b, $b+\lambda a$,

$$\left(\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{a}{b+\lambda a}\right),$$

et que, si a est négatif et $b(b+\lambda a)<0$, on aura toujours

$$\left(\frac{a}{b}\right)=-\left(\frac{a}{b+\lambda a}\right).$$

Ces divers résultats peuvent être réunis dans une seule formule

$$\left(\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{a}{b+\lambda a}\right)(-1)^{\frac{\operatorname{sgn} a-1}{2}\frac{\operatorname{sgn}[b(b+\lambda a)]-1}{2}}$$

(a ayant la forme de discriminant).

§ 5. Sur les sommes $\sum_s \left(\frac{s}{n}\right) e^{s\frac{2\pi h i}{n}}$, $\sum_s \left(\frac{n}{s}\right) e^{s\frac{2\pi h i}{n}}$, principalement dans le cas où n a la forme d'un discriminant fondamental.

Considérons les sommes

$$\sum_s \left(\frac{s}{n}\right) e^{s\frac{2h\pi i}{n}} = \psi(h, n), \qquad \sum_s \left(\frac{n}{s}\right) e^{s\frac{2h\pi i}{n}} = \psi_1(h, n)$$

$(s = 1, 2, \ldots |n|$ ou $s = 0, 1, 2, \ldots |n| - 1$; h premier ou non à n),

qui, pour $n = \pm 1$ se réduisent à l'unité. D'après le paragraphe précédent, si $n \not\equiv 2 \pmod 4$, on peut aussi bien faire parcourir à s, dans la définition de ψ, un système de restes $(\bmod n)$ positifs ou négatifs, et si n a la forme de discriminant, on peut de même, dans la définition de ψ_1, faire parcourir à s un système de restes positifs $(\bmod n)$.

Ces sommes ont les propriétés générales suivantes :

(1) $\psi(-h, n) = \psi(h, -n)$ est imaginaire conjuguée de $\psi(h, n) = \psi(-h, -n)$, $\psi_1(-h, n)$ est conjuguée de $\psi_1(h, n)$;

(2) $\psi(h, n) = \psi(h', n)$, $\psi_1(h, n) = \psi_1(h', n)$; $[h \equiv h' \pmod n]$,

(3) $\psi(ha^2, n) = \psi(h, n)$, $\psi_1(ha^2, n) = \psi_1(h, n)$; ($a$ premier à n),

(4) $\psi(hm, n)\psi(hn, m) = \psi(h, mn)$ [m, n premiers entre eux, positifs ou négatifs et $\not\equiv 2 \pmod 4$; h entier quelconque, positif ou négatif],

$\psi_1(hm, n)\psi_1(hn, m) = \psi_1(h, mn)$ (m, n premiers entre eux, positifs ou négatifs, ayant la forme de discriminant; h entier quelconque, positif ou négatif).

Les trois premières propriétés sont manifestes.

La quatrième se démontre comme il suit. On a

$$\psi(hm, n)\psi(hn, m) = \sum_{s,t} \left(\frac{s}{n}\right)\left(\frac{t}{m}\right) e^{\frac{2h\pi i}{mn}(sm^2 + tn^2)},$$

$s = 1, 2, \ldots |n|$; $t = 1, 2, \ldots |m|$

et, d'après le paragraphe précédent, en vertu des hypothèses faites,

$$\psi(hm, n)\,\psi(hn, m) = \sum_{s,t} \left(\frac{sm^2+tn^2}{n}\right)\left(\frac{sm^2+tn^2}{m}\right) e^{\frac{2h\pi i}{mn}(sm^2+tn^2)},$$

de même

$$\psi_1(hm, n)\,\psi_1(hn, m) = \sum_{s,t} \left(\frac{n}{sm^2+tn^2}\right)\left(\frac{m}{sm^2+tn^2}\right) e^{\frac{2h\pi i}{mn}(sm^2+tn^2)}.$$

On voit ensuite, comme au § 3, que sm^2+tn^2 parcourt un système de restes $(\bmod\, mn)$, et ces restes sont évidemment positifs si s et t le sont. La propriété en question est donc établie.

On a trouvé (§ 3), dans le cas où p est premier, positif, et h premier à p, positif, l'égalité

$$\psi(h, p) = \left(\frac{h}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} |\sqrt{p}|$$

qui subsiste évidemment si $h \equiv 0 \pmod p$, car le premier membre se réduit alors à $\sum_s \left(\frac{s}{p}\right) = 0$ (§ 3), et si h est < 0, d'après la valeur de $\left(\frac{-1}{p}\right)$.

On en déduit, par une généralisation de la formule (4) analogue à celle de la formule (5) du § 4, en usant du théorème de réciprocité,

$$\psi(h, P) = \left(\frac{h}{P}\right) i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2} |\sqrt{P}|$$

(P produit de facteurs premiers impairs différents et positifs; h positif, premier ou non à P).

L'examen des divers cas possibles montre facilement la vérité de la formule plus générale

$$(5)\quad \psi(h, P) = \left(\frac{h}{P}\right) i^{\operatorname{sgn} P\left(\frac{|P|-1}{2}\right)^2} |\sqrt{P}| = \left(\frac{h}{P}\right) i^{-P\left(\frac{P-1}{2}\right)^2} (\sqrt{P}) \operatorname{sgn} P$$

(P impair, sans diviseur carré, positif ou négatif; h positif ou négatif, premier ou non à P).

Remarquons que $\psi(h, p^\alpha)$ est nul si α est pair, p premier, pair ou impair et h premier à p, car alors $\left(\frac{s}{p^\alpha}\right)$ étant toujours égal

à $+1$ ou à o, on a

$$\psi(h, p^\alpha) = \sum_s e^{s\frac{2h\pi i}{p^\alpha}} - \sum_{t=1}^{t=p^{\alpha-1}} e^{tp\frac{2hi\pi}{p^\alpha}} = - \sum_{t=1}^{t=p^{\alpha-1}} e^{t\frac{2hi\pi}{p^{\alpha-1}}} = 0.$$

Donc, h, M étant premiers entre eux, positifs ou négatifs, si quelques-uns des facteurs premiers de M ont un exposant pair, on aura toujours, du moins quand $M \not\equiv 2 \pmod 4$,

$$\psi(h, M) = 0.$$

Remarquons encore que, si α est pair, ou $p \equiv 1 \pmod 4$, ou $p = 2$, on a

$$\psi(h, p^\alpha) = \psi_1(h, p^\alpha);$$

et, par conséquent, si les facteurs premiers qui entrent dans M avec un exposant pair sont $\equiv 1 \pmod 4$, on aura aussi

$$\psi_1(h, M) = 0.$$

Je désignerai désormais par P, h, n des nombres positifs ou négatifs, sans diviseur carré, et P sera en outre supposé impair (dans les formules finales on pourra toujours ajouter à h, dans les deux membres, des facteurs carrés premiers au second argument). On aura alors, quand h sera premier à $4P$,

$$\psi(h, 4P) = 0.$$

Calculons $\psi(h, 8P)$ (h premier ou non à P) en partant de

$$\psi(h, 8P) = \psi(8h, P)\psi(Ph, 8).$$

Un calcul direct donne

$$\psi(n, 8) = 4\cos\frac{n\pi}{4} = \left(\frac{8}{n}\right)\sqrt{8};$$

donc

$$\psi(h, 8P) = \left(\frac{8h}{P}\right) i^{-P\left(\frac{P-1}{2}\right)^2} (\sqrt{P}) \operatorname{sgn} P \left(\frac{8}{Ph}\right)\sqrt{8},$$

$$(6) \qquad \psi(h, 8P) = \left(\frac{h}{8P}\right) i^{-P\left(\frac{P-1}{2}\right)^2} (\sqrt{8P}) \operatorname{sgn} P.$$

Supposons $h > 0$, $P \equiv 1 \pmod 4$ dans (5) et (6), et confondons P et 8P dans la notation P_1. Ces formules se réuniront en une

$$(7) \qquad \psi(h, P_1) = \left(\frac{P_1}{h}\right)(\sqrt{P_1}) \operatorname{sgn} P_1$$

ou

$$(8)\quad \begin{cases} \psi(h\,\mathrm{sgn}\,P_1,\, P_1) = \psi_1(h\,\mathrm{sgn}\,P_1,\, P_1) = \left(\dfrac{P_1}{h}\right)(\sqrt{P_1}) \\ [P_1 = P \text{ ou } 8P,\ P \equiv 1 \pmod 4 \text{ sans diviseur carré; } h \text{ positif quelconque premier ou non à } P]. \end{cases}$$

Venons au calcul de $\psi_1(h, 4P)$, $\psi_1(h, 8P)$ quand $P \equiv -1 \pmod 4$. On a, puisque $-P$ et -4 ont la forme de discriminant,

$$\begin{aligned} \psi_1(h, 4P) = \psi_1[h, (-4)(-P)] &= \psi_1(-4h, -P)\psi_1(-Ph, -4) \\ &= \psi(-4h, -P)\psi_1(-Ph, -4). \end{aligned}$$

Un calcul direct donne

$$\psi_1(-n, -4) = 2i \sin\frac{n\pi}{2} = 2i\left(\frac{-4}{n}\right)\mathrm{sgn}\,n = 2\left(\frac{4}{n}\right)i^n.$$

Donc

$$\begin{aligned} \psi_1(h, 4P) &= \left(\frac{-h}{-P}\right) i^{P\left(\frac{P+1}{2}\right)^2} (\sqrt{-P})\,\mathrm{sgn}(-P).2\left(\frac{4}{Ph}\right) i^{Ph}. \\ &= \left(\frac{-h}{-P}\right)\left(\frac{4}{Ph}\right) i^{Ph}(\sqrt{-4P})\,\mathrm{sgn}(-P), \\ &= \left(\frac{-4P}{-h}\right)(-1)^{\frac{\mathrm{sgn}(-P)-1}{2}\frac{\mathrm{sgn}(-h)-1}{2}} i^{Ph}(\sqrt{-4P})\,\mathrm{sgn}(-P) \end{aligned}$$

et, si de plus $h > 0$,

$$\psi_1(h, 4P) = \left(\frac{4P}{h}\right)(\sqrt{-4P})\, i^{-1}$$

ou

$$(9)\quad \begin{cases} \psi_1(h\,\mathrm{sgn}\,P, 4P) = \left(\dfrac{4P}{h}\right)(\sqrt{4P}) \\ [P \equiv -1 \pmod 4, \text{ sans diviseur carré; } h \text{ entier positif quelconque}]. \end{cases}$$

$\psi_1(h, 8P)$ se calcule de la même manière. Puisque -8 et $-P$ ont la forme de discriminant, on a

$$\psi_1(h, 8P) = \psi_1[h, (-8)(-P)] = \psi_1(-8h, -P)\,\psi_1(-Ph, -8).$$

Or, un calcul direct donne

$$\psi_1(-n, -8) = 2i\sin\frac{n\pi}{4}(1 - e^{n\pi i}) = \left(\frac{-8}{n}\right) i\sqrt{8}\,\mathrm{sgn}\,n.$$

Donc

$$\psi_1(h, 8P) = \left(\frac{-8h}{-P}\right) i^{P\left(\frac{P+1}{2}\right)^2}(\sqrt{-P})\,\mathrm{sgn}(-P)\left(\frac{-8}{-Ph}\right) i\sqrt{8}\,\mathrm{sgn}\,Ph.$$

et, si $h > 0$,

$$\psi_1(h, 8P) = \left(\frac{8P}{h}\right) i^{-1} (\sqrt{-8P})$$

ou

$$(10) \quad \begin{cases} \psi_1(h \operatorname{sgn} P, 8P) = \left(\frac{8P}{h}\right)(\sqrt{8P}) \\ [P \equiv -1 \pmod 4), \text{ sans diviseur carré; } h \text{ entier } > 0]. \end{cases}$$

Enfin on peut réunir en une les formules (8), (9), (10), en écrivant

$$(11) \quad \begin{cases} \sum_s \left(\frac{D_0}{s}\right) e^{\frac{2sh\pi i}{|D_0|}} = \left(\frac{D_0}{h}\right)(\sqrt{D_0})(-1)^{\frac{\operatorname{sgn} h - 1}{2} \frac{\operatorname{sgn} D_0 - 1}{2}} \\ (s = 1, 2, \ldots, |D_0| \text{ ou } = 0, 1, 2, \ldots, |D_0| - 1 \text{; } h \text{ entier positif ou négatif; } D_0 \text{ discriminant fondamental}). \end{cases}$$

On peut négliger le terme correspondant à $s = |D_0|$ ou à $s = 0$ qui est toujours nul.

Pour $h = |D_0|$ et $|D_0| > 1$, la formule (11) devient

$$(12) \quad \sum_{s=1}^{s=|D_0|} \left(\frac{D_0}{s}\right) = 0 \quad (|D_0| > 1).$$

(¹) Kronecker a donné sans démonstration la formule (voir *Sitzungsberichte*, p. 780; 1885)

$$\sum_s \left(\frac{D_0}{s}\right) e^{\frac{2sh\pi i}{|D_0|}} = \left(\frac{D_0}{h}\right)(\sqrt{D_0}) \qquad (s = 1, 3, 5, \ldots, 2|D_0| - 1;\ h > 0),$$

en faisant remarquer qu'elle se confond avec la formule (18) si $D_0 \equiv 1 \pmod 4$ [2, 4, 6, ..., sont alors congrus à $|D_0| + 2$, $|D_0| + 4, \ldots, \pmod{D_0}$ et ces derniers nombres sont impairs]. Mais cette formule paraît inexacte si $D_0 \equiv 0 \pmod 4$, les termes où $s = |D_0| + 1$, $|D_0| + 3$, ... reproduisant ceux où $s = 1, 3, 5, \ldots$.

CHAPITRE II.

PRINCIPES DE LA THÉORIE DES FORMES QUADRATIQUES.

§ 6. Généralités.

a, b, c étant trois entiers et x, y deux indéterminées, l'expression

$$ax^2 + bxy + cy^2 = (a, b, c)$$

se nomme *forme quadratique* de *discriminant*

$$b^2 - 4ac = D.$$

Ce discriminant D sera supposé n'être jamais carré parfait. On voit qu'il est toujours $\equiv 0$ ou $\equiv 1 \pmod 4$, et que $b \equiv D \pmod 2$.

En enlevant à D son plus grand diviseur carré Q'^2, on obtient un produit de facteurs premiers distincts qui est $\equiv 1, 2$, ou $3 \pmod 4$. Dans le premier cas, il a la forme de discriminant. Dans les deux autres cas, Q'^2 contient forcément un facteur 4 que l'on adjoindra au quotient précédemment formé pour lui donner la forme de discriminant. Le discriminant ainsi formé se nomme le *discriminant fondamental* D_0 et l'on aura ainsi

$$D = D_0 Q^2,$$

Q étant un entier, et D_0 ayant l'une des trois formes suivantes

$$\begin{array}{lll} D_0 = P & \text{avec} & P \equiv 1 \pmod 4, \\ D_0 = 4P & \text{avec} & P \equiv -1 \pmod 4, \\ D_0 = 8P & \text{avec} & P \equiv \pm 1 \pmod 4). \end{array}$$

Si σ est le plus grand commun diviseur de a, b, c, la forme sera dite *de l'espèce* ou *de l'ordre* σ. Si $\sigma = 1$, la forme est dite *primitive*. On voit qu'il n'existe de formes de l'ordre $\sigma > 1$ que si $\frac{D}{\sigma^2} = \left(\frac{b}{\sigma}\right)^2 - 4\frac{a}{\sigma}\frac{c}{\sigma}$ a la forme de discriminant. Cela ne peut avoir

lieu que si σ divise Q; car σ^2 doit diviser D, et D_0 perd avec un seul facteur carré la forme de discriminant. En particulier, il n'y aura de formes du second ordre que si Q est pair et alors il y en aura toujours. Si $D_0 \equiv 1 \pmod 4$ et $Q \equiv 2 \pmod 4$, les formes d'ordre 2 sont les formes improprement primitives de Gauss. On voit d'ailleurs immédiatement que les formes primitives où $D \equiv 0 \pmod 4$ sont les formes proprement primitives de ce géomètre.

Sauf indication contraire, toute forme sera supposée primitive.

Si l'on fait

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \alpha x' + \beta y', \\ y = \gamma x' + \delta y', \end{cases}$$

autrement dit, si l'on applique à x', y' la *substitution* $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, (a, b, c) se changera en une forme a', b', c' où

$$(2) \qquad \begin{cases} a' = a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2, \\ b' = 2a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2c\gamma\delta, \\ c' = a\beta^2 + b\beta\delta + c\delta^2. \end{cases}$$

Le nombre $\alpha\delta - \beta\gamma$ est l'*ordre* ou le *degré* de la substitution.

Si $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, la substitution est dite *linéaire, primitive* ou *propre* et (a, b, c) est dite *équivalente* à (a', b', c'), ce qui s'écrit

$$(a, b, c) \backsim (a', b', c').$$

On voit qu'alors (1) est résoluble par rapport à x', y' en nombres entiers, si x, y sont eux-mêmes entiers, et que, par suite, on pourra revenir de (a', b', c') à (a, b, c) par la substitution

$$\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

qui est dite *inverse* de la première.

Quand D est < 0, (a, b, c) garde toujours le signe de ses coefficients extrêmes, qui sont alors de même signe. On voit donc, d'après (2), que ce signe se conserve dans les formes équivalentes à (a, b, c). On voit, d'autre part, que l'équivalence

$$(a, b, c) \backsim (a', b', c')$$

entraîne la suivante

$$(-a, -b, -c) \backsim (-a', -b', -c').$$

Si donc $D < 0$, il ne sera jamais question, sauf avis contraire, que de formes *positives* (à coefficients extrêmes positifs).

Si $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$, la substitution est dite *improprement primitive* ou *impropre* et les formes (a, b, c), (a', b', c') *improprement équivalentes*.

En appliquant d'abord la substitution $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = S$, puis la substitution $\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} = S'$, on obtient le *produit* ou la substitution *composée* de S et de S'

$$SS' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' + \beta\gamma' & \alpha\beta' + \beta\delta' \\ \gamma\alpha' + \delta\gamma' & \gamma\beta' + \delta\delta' \end{pmatrix},$$

où l'ordre des facteurs *composants* n'est pas indifférent. Si ε est le déterminant de S, ε' celui de S', le déterminant de SS' comme celui de S'S sera $\varepsilon\varepsilon'$.

Le produit de deux substitutions inverses l'une de l'autre est la substitution *unité*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et l'on désigne les deux substitutions par S, S^{-1} pour écrire $SS^{-1} = 1$. Le déterminant de S est toujours le même que celui de S^{-1}.

Deux formes de même discriminant ayant un des coefficients extrêmes commun et des seconds coefficients différant seulement d'un multiple pair de celui-là sont dites *parallèles* (¹). Elles sont équivalentes; ainsi

$$(a, b, c) \backsim (a, b', c'),$$

si

$$b' = b + 2ha,$$

et la substitution permettant de passer de la forme (a, b, c) à la forme (a, b', c') est

$$\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^h.$$

on a alors

$$c' = c + bh + ah^2.$$

(¹) *Voir* DIRICHLET, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, § 56; note de M. Dedekind.

De même

$$(a, b, c) \backsim (a', b', c),$$

si

$$b' = b + 2hc,$$

et la substitution qui change (a, b, c) en (a', b', c) est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^h.$$

Mais les équivalences

$$(a, b, c) \backsim (a, b', c'), \qquad (a, b, c) \backsim (a', b', c)$$

n'entraînent pas respectivement les congruences

$$b \equiv b' (\bmod 2a), \qquad b \equiv b (\bmod 2c);$$

on en verra un exemple au § 7.

Les formes *opposées* (¹) (a, b, c), $(a, -b, c)$ sont improprement équivalentes : la substitution qui change la première en la seconde est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les formes *associées* (²) (a, b, c), (c, b, a) sont aussi improprement équivalentes : la substitution qui change la première en la seconde est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le produit de ces deux substitutions étant nécessairement une substitution propre

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

on a

$$(a, b, c) \backsim (c, -b, a).$$

Ces formes sont dites *complémentaires* (³).

(¹) GAUSS, *Disq.*, art. 159.

(²) GAUSS, *Disq.*, art. 187.

(³) DIRICHLET, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, § 56; note de M. Dedekind.

Les deux substitutions

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

qui changent une forme en une forme parallèle ou en une forme complémentaire, sont dites *fondamentales* et toute substitution primitive $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = S$ résulte de leur composition. En effet, on a d'abord

$$C^h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{pmatrix}, \qquad B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B^3 = B^{-1},$$

$$B^{-1} C^h B = \begin{pmatrix} 1 & -h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-h},$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ étant la substitution analogue à C, conservant le premier coefficient. Formons maintenant les substitutions

$$S_1 = SC^h, \qquad S_2 = S_1 A^{-h_1}, \qquad S_3 = S_2 C^{h_2}, \qquad \ldots,$$
$$S_{2i} = S_{2i-1} A^{-h_{2i-1}}, \qquad S_{2i+1} = S_{2i} C^{h_{2i}}, \qquad \ldots.$$

En posant

$$S_k = \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ \gamma_k & \delta_k \end{pmatrix},$$

on aura

$$\alpha_{2i+1} = \alpha_{2i} + \beta_{2i} h_{2i}, \qquad \beta_{2i} = \beta_{2i-1} - \alpha_{2i-1} h_{2i-1},$$

et l'on pourra prendre les h tels que

$$|\alpha_{2i+1}| \leqq \left|\frac{\beta_{2i}}{2}\right|, \qquad |\beta_{2i}| \leqq \left|\frac{\alpha_{2i-1}}{2}\right|.$$

La série $|\beta|$, $|\alpha_1|$, $|\beta_2|$, $|\alpha_3|$, ..., se composant ainsi d'entiers positifs décroissants, conduira, après un nombre fini d'opérations, à un terme nul. Si c'est $\beta_{2n} = 0$, donc $\alpha_{2n}\delta_{2n} = 1$, donc $\alpha_{2n} = \delta_{2n} = \varepsilon$, ε étant égal à ± 1, on aura

$$S_{2n} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ \gamma_{2n} & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} C^{\varepsilon\gamma_{2n}}.$$

Si c'est $\alpha_{2n+1} = 0$, donc $\beta_{2n+1}\gamma_{2n+1} = -1$, $\beta_{2n+1} = -\gamma_{2n+1} = \varepsilon$,

$$S_{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ -\varepsilon & \delta_{2n+1} \end{pmatrix} = C^{\varepsilon\delta_{2n+1}} B^{\varepsilon}.$$

Comme on a d'ailleurs

$$S = S_1 C^{-h} = S_2 A^{h_1} C^{-h} = S_3 C^{-h_2} A^{h_1} C^{-h} = \ldots,$$

le théorème est démontré ([1]).

Définissons encore les formes contiguës, d'après Gauss. La substitution

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = BA^{-h}$$

transforme

$$(a, b, a_1) \quad \text{en} \quad (a_1, b_1, a_2),$$
$$b_1 = -b - 2a_1 h, \qquad a_2 = a + bh + a_1 h^2;$$

(a, b_1, a_2) est *contiguë à droite* de (a, b, a_1), (a, b, a_1) est *contiguë à gauche* de (a_1, b_1, a_2) ([2]).

Inversement la substitution

$$\begin{pmatrix} h & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & h \end{pmatrix}^{-1} = A^h B^{-1}$$

transformera (c_1, b, c) en une contiguë à gauche (c_2, b_1, c_1) où

$$b_1 = -b - 2c_1 h, \qquad c_2 = c + bh + c_1 h^2.$$

On peut choisir h tel que $|b_1| \leqq |c_1|$. Si $|c_1|$ est en même temps $> |c_2|$ prenons encore une contiguë à gauche de (c_2, b_1, c_1), soit (c_3, b_2, c_2), où $|b_2| \leqq |c_2|$, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on arrive à une forme (c_{n+1}, b_n, c_n), où l'on ait toujours $|b_n| \leqq |c_n|$, et en même temps $|c_n| \leqq |c_{n+1}|$: on y arrivera après un nombre fini d'opérations, puisque, tant que cette dernière condition n'est pas remplie, les c_i décroissent quand leur indice croît. On saura ainsi trouver une forme (a, b, c) équivalente à une forme donnée et telle que

$$|b| \leqq |c| \leqq |a|.$$

Dans le cas $D < 0$ où, par conséquent, $|c| = c$, $|a| = a$, les conditions

$$|b| \leqq c \leqq a$$

([1]) Cette démonstration est empruntée à l'Ouvrage de M. Weber *Elliptische Functionen und algebraische Zahlen*, § 25. *Voir* aussi KRONECKER, *Monatsberichte*, octobre 1866.

([2]) GAUSS, *Disq.*, art. 160.

caractérisent une forme *réduite* [1]. Le nombre des formes réduites est fini, car des inégalités précédentes on déduit ($D < 0$)

$$4b^2 - b^2 \leqq 4ac - b^2, \quad \text{donc} \quad |b| \leqq \sqrt{\frac{|D|}{3}},$$

$$4c^2 - c^2 \leqq 4ac - b^2, \quad \text{donc} \quad |b| \leqq c \leqq \sqrt{\frac{|D|}{3}}.$$

b ne pourra donc prendre qu'un nombre fini de valeurs positives et négatives à chacune desquelles correspond un nombre fini de couples a, c satisfaisant à $4ac = b^2 + |D|$.

Dans le cas $D > 0$, on nomme réduite toute forme (a, b, c) satisfaisant à

$$0 < \sqrt{D} - b < 2|a| < \sqrt{D} + b,$$

conditions qui exigent évidemment $b > 0$ et $ac < 0$ (car $b < \sqrt{D}$ donne $b^2 < b^2 - 4ac$). Ici encore, on peut toujours trouver une forme réduite équivalente à une forme donnée quelconque (c_1, b, c). Prenons une contiguë à gauche (c_2, b_1, c_1), où b_1 soit compris entre $\sqrt{D} - 2|c_1|$ et $\sqrt{D}$: il y en a toujours une et une seule, car si E est le plus grand entier $< \sqrt{D}$, les nombres entiers

$$E, \quad E - 1, \quad \ldots, \quad E - 2|c_1| + 1,$$

compris entre $\sqrt{D}$ et $\sqrt{D} - 2|c_1|$ forment un système complet de restes (mod $2c_1$). Si alors $|c_1| > |c_2|$, on répétera l'opération comme précédemment jusqu'à ce que l'on arrive à une forme (c_{n+1}, b_n, c_n) où $|c_n| \leqq |c_{n+1}|$ en même temps que

$$\sqrt{D} - |2c_n| < b_n < \sqrt{D}.$$

Changeant les notations pour simplifier, on voit qu'on peut toujours trouver une forme (a, b, c) équivalente à une forme donnée et telle que

$$|c| \leqq |a|, \quad \sqrt{D} - 2|c| < b < \sqrt{D}.$$

Cette forme est réduite. En effet, les inégalités précédentes donnent

$$(3) \qquad 0 < \sqrt{D} - b < 2|c| \leqq 2|a|,$$

---

[1] En prenant les contiguës à droite, on arriverait, comme Dirichlet, à une forme réduite définie par $|b| \leqq a \leqq c$.

donc

$$(4)\qquad \frac{-b+\sqrt{D}}{2|a|}<1 \qquad \text{ou} \qquad \left|\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right|<1,$$

et

$$(5)\quad \frac{2|c|}{\sqrt{D}-b}>1 \qquad \text{ou} \qquad \left|\frac{2c}{\sqrt{D}-b}\right|>1 \qquad \text{ou} \qquad \left|\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right|>1$$

ou

$$(6)\qquad \sqrt{D}+b>2|a|>\sqrt{D}-b>0.$$

Les inégalités (6) caractérisent une forme réduite.

Le nombre des formes réduites de discriminant positif est fini, car les conditions (6) exigeant, comme on l'a vu, $b>0$, $ac<0$, on aura

$$(7)\qquad D-b^2=4|a||c|,$$

et b ne pourra prendre qu'un nombre fini de valeurs, pour chacune desquelles les couples a, c satisfaisant à (7) seront aussi en nombre fini.

Deux formes équivalentes à une troisième étant équivalentes entre elles, on pourra ranger dans une même *classe* toutes les formes équivalentes à une forme donnée. La classe *principale* est celle qui renferme la forme *principale*

$$\left(1, \lambda, \frac{\lambda^2-D}{4}\right),$$
$$[\lambda\equiv D \pmod 4),\quad 0\leqq\lambda\leqq 1].$$

Toute forme étant équivalente à une forme réduite, et le nombre des formes réduites étant toujours fini, le nombre des classes sera lui-même fini ([1]). D'ailleurs nous le calculerons.

Remarquons enfin que deux formes (a, b, c), (a', b', c') de même discriminant D et d'ordre σ, sont équivalentes, si les formes primitives $\left(\frac{a}{\sigma}, \frac{b}{\sigma}, \frac{c}{\sigma}\right)$, $\left(\frac{a'}{\sigma}, \frac{b'}{\sigma}, \frac{c'}{\sigma}\right)$ de discriminant $\frac{D}{\sigma^2}$ sont équivalentes et réciproquement. On est donc, en définitive, toujours

([1]) Voir une théorie toute différente des formes réduites et de leur équivalence dans les *Vorlesungen über die Theorie der Modulfunctionen* de F. Klein, t. I, p. 243; t. II, p. 161.

ramené à l'ordre primitif. Ainsi, en particulier, quand il s'agit des formes du second ordre, au cas où $D_0 \equiv 1 \pmod 4$ et $Q \equiv 2 \pmod 4$ on est ramené aux formes primitives de discriminant $D = D_0 \equiv 1 \pmod 4$.

J'ai déjà fait observer que les formes primitives de discriminant $D \equiv 0 \pmod 4$ représentent les formes primitives de Gauss, et les formes primitives de discriminant $D \equiv 1 \pmod 4$ ses formes improprement primitives. Cette remarque permet d'employer facilement les tables construites par ses soins [1] sans perdre les avantages de la notation de Kronecker.

§ 7. Formes ambiguës.

Deux formes peuvent être à la fois proprement et improprement équivalentes. Ainsi $(3, 26, 18)$ se change en $(-5, -10, 18)$ par les substitutions $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, dont la première est propre, la seconde impropre. Dans ce cas, chacune des deux formes est improprement équivalente à elle-même; car, si S est la substitution propre, S' la substitution impropre changeant (a, b, c) en (a', b', c'), $S'S^{-1}$ qui change (a, b, c) en elle-même sera impropre, de même SS'^{-1} tandis que $SS^{-1}\,S'S'^{-1}$ donnent la substitution unité par laquelle évidemment toute forme se change proprement en elle-même.

Inversement, si deux formes équivalentes (a, b, c), (a', b', c') sont improprement équivalentes à elles-mêmes, elles sont à la fois proprement et improprement équivalentes entre elles; car soient S_0 une substitution impropre changeant (a, b, c) en elle-même et S' une substitution propre changeant (a, b, c) en (a', b', c'), $S_0 S'$ sera une substitution impropre changeant (a, b, c) en (a', b', c').

Puisqu'une forme est toujours improprement équivalente à son opposée, elle lui sera en outre proprement équivalente, si elle est improprement équivalente à elle-même, et réciproquement. Donc, dire qu'une forme est improprement équivalente à elle-même, c'est dire qu'elle équivaut à son opposée, et réciproquement.

---

[1] Voir *Werke*, t. II, p. 450 et p. 521; *Disq.*, art. 303

Si $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ *est une substitution impropre changeant* (a, b, c) *en elle-même, on a* $\alpha = -\delta$. En effet, les hypothèses donnent

$$a\alpha^2 + \gamma(b\alpha + c\gamma) = a, \tag{1}$$
$$2a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2c\gamma\delta = b, \tag{2}$$
$$\alpha\delta - \beta\gamma = -1. \tag{3}$$

La seconde équation devient, si, d'après la troisième, on y remplace $\beta\gamma$ par $1 + \alpha\delta$,

$$a\alpha\beta + \delta(b\alpha + c\gamma) = 0, \tag{4}$$

et, en éliminant $b\alpha + c\gamma$ entre (1) et (4), on obtient

$$a\alpha^2\delta - a\alpha\beta\gamma = a\delta.$$

On peut diviser par a qui est $\neq 0$ (sans quoi D serait carré); donc

$$(\alpha^2 - 1)\delta = \alpha\beta\gamma,$$

et, comme $\beta\gamma = 1 + \alpha\delta$,

$$(\alpha^2 - 1)\delta = \alpha + \alpha^2\delta, \qquad \text{ou} \qquad \alpha = -\delta.$$

Donc, quand une forme est équivalente à son opposée (improprement équivalente à elle-même), toute substitution impropre la transformant en elle-même est nécessairement de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \alpha^2 + \beta\gamma = 1.$$

Si $\gamma = 0$, donc $\alpha = \pm 1 = \varepsilon$, (4) donne

$$a\beta\varepsilon = b,$$

et l'on vérifie qu'inversement, si $b = a\beta\varepsilon$, la substitution $\begin{pmatrix} \varepsilon & \beta \\ 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}$ transforme (a, b, c) en elle-même. Ainsi une forme où $b \equiv 0 \pmod{a}$, non seulement est équivalente à son opposée et, par conséquent, improprement équivalente à elle-même, mais encore se transforme en elle-même par la substitution particulière $\begin{pmatrix} \varepsilon & \beta \\ 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}$ $(\varepsilon = \pm 1)$. Une telle forme est dite *ambiguë* (¹) et est caractérisée par l'une

(¹) GAUSS, *Disq.*, art. 164.

quelconque des deux propriétés

$$(5)\begin{cases} b \equiv 0 \pmod{a}, \\ \gamma \equiv 0 \text{ dans une substitution impropre qui la transforme en elle-même.} \end{cases}$$

On voit que, étant donnée une forme ambiguë, il existe toujours une forme parallèle (a, b, c) où $b = 0$, ou $b = a$.

Toute forme (a, b, c) équivalente à une ambiguë est équivalente à son opposée. Car soit S une substitution transformant (a, b, c) en une ambiguë; (a, b, c) se transforme en elle-même par la substitution

$$S\begin{pmatrix} \varepsilon & \beta \\ 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}S^{-1},$$

évidemment impropre.

Ainsi $(5, 6, 2)$, qui se déduit de la forme ambiguë $(1, 0, 1)$ par la substitution $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, équivaut à $(5, -6, 2)$ et à ses formes parallèles

$$(5,\quad -6+10h,\quad 2-6h+5h^2).$$

En prenant $h = 1$, on a

$$(5, 6, 2) \backsim (5, 4, 1).$$

C'est un exemple de formes des types (a, b, c), (a, b', c') équivalentes sans que l'on ait $b \equiv b' \pmod{2a}$.

Une classe qui contient une forme ambiguë est dite *ambiguë* et est identique à la classe opposée, car toutes les formes de la classe sont équivalentes à la forme ambiguë et par conséquent à leurs opposées.

Réciproquement, toute forme f équivalente à son opposée est équivalente à une ambiguë. En effet, f se transformera en elle-même par une substitution de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \alpha^2 + \beta\gamma = 1;$$

et γ est $\neq 0$, sans quoi f serait elle-même ambiguë. Cherchons une substitution propre

$$\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \nu & \rho \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \lambda\rho - \mu\nu = 1,$$

changeant f en une équivalente ambiguë φ. Il faut pour cela et il

suffit que, dans la substitution composée impropre

$$\begin{pmatrix} \rho & -\mu \\ -\nu & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \nu & \rho \end{pmatrix}$$

qui change φ en elle-même, le troisième coefficient $\gamma\lambda^2 - 2\alpha\lambda\nu - \beta\nu^2$ soit nul. Cette équation du second degré en $\frac{\lambda}{\nu}$ dont le discriminant $4(\alpha^2 + \beta\gamma) = 4$ donne

$$\frac{\lambda}{\nu} = \frac{\alpha \pm 1}{\gamma};$$

si on prend alors pour λ, ν les deux termes de la fraction réduite équivalente à $\frac{\alpha \pm 1}{\gamma}$, on trouvera ρ, μ par l'équation de Diophante

$$\lambda\rho - \mu\nu = 1.$$

Remarquons qu'au lieu des conditions simultanées (5) on aurait pu choisir les suivantes

(6) $\begin{cases} b \equiv 0 \pmod{c}, \\ \beta \equiv 0 \text{ dans une substitution impropre qui transforme } (a, b, c) \text{ en elle-même,} \end{cases}$

ce qui permet d'élargir la notion d'ambiguïté, et de nommer ambiguë une forme (a, b, c) où b est divisible par a ou par c, admettant par conséquent une substitution impropre $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$ qui la change en elle-même et où respectivement γ ou β soit nul.

§ 8. Problème fondamental de la théorie des formes quadratiques.

Le problème fondamental de la théorie des formes quadratiques consiste à reconnaître si deux formes données sont équivalentes, et, dans ce cas, à trouver toutes les substitutions changeant l'une de ces formes en l'autre.

La première partie se résout en remplaçant les formes proposées par les formes réduites équivalentes. On est donc ramené à l'étude des cas d'équivalence des formes réduites. Cette étude nous entraînerait trop loin; je me contenterai de rappeler que, par elle

seulement jusqu'ici, on est arrivé à un algorithme fournissant les plus petites solutions positives de l'équation de Pell

$$t^2 - Du^2 = 4\sigma^2 \qquad [D \equiv 0 \pmod{\sigma^2}],$$

quand D est positif ([1]).

La seconde partie est indispensable. Soient f, φ deux formes données équivalentes, S_0 une substitution changeant f

---

([1]) L'observation suivante, qui appartient à cette théorie, reviendra plus tard. Si l'on a

$$ax^2 + bxy + cy^2 = a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2,$$

$$x = \alpha x' + \beta y', \quad y = \gamma x + \delta y', \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

donc

$$(1) \qquad \begin{cases} a' = a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2, \\ b' = 2a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2c\gamma\delta, \\ c' = a\beta^2 + b\beta\delta + c\delta^2, \end{cases}$$

$\omega = \dfrac{x}{y}$ et $\omega' = \dfrac{x'}{y'}$ étant respectivement les racines de

$$a\omega^2 + b\omega + c = 0, \qquad a'\omega'^2 + b'\omega' + c' = 0,$$

on a évidemment la relation

$$(2) \qquad \omega = \frac{\alpha\omega' + \beta}{\gamma\omega' + \delta}, \qquad \omega' = \frac{-\delta\omega + \beta}{\gamma\omega - \alpha};$$

mais ce qui importe, c'est que les deux racines ω, ω' liées par cette relation sont *de même nom,* c'est-à-dire que le radical a le même signe dans ω et dans ω'. En effet, la relation précédente donne, si $\omega = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$,

$$\omega' = \frac{-\delta(-b + \sqrt{D}) + 2\beta a}{\gamma(-b + \sqrt{D}) - 2\alpha a};$$

en rendant le dénominateur rationnel et en tenant compte de (1), on en déduit

$$\omega' = \frac{-b' + \sqrt{D}}{2a'}.$$

Réciproquement, si (a, b, c), (a', b', c') ont même discriminant, et que deux racines de même nom ω, ω' soient liées par (2) (avec $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$), les deux formes sont équivalentes, et la première se change en la seconde par la substitution $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Car par cette substitution (a, b, c) se change en une forme dont une racine est ω' de même nom que ω et liée à ω par (2); la seconde racine, qui ne diffère de ω' que par le signe de $\sqrt{D}$, appartient aussi à (a', b', c'). Donc cette forme ayant mêmes racines et même discriminant que (a', b', c') lui est identique.

en φ, et $T_i (i = 1, 2, 3, \ldots)$ toutes les substitutions transformant f en elle-même. Toutes les substitutions S changeant f en φ sont contenues dans l'expression $T_i S_0$, et chacune une fois seulement. En effet, SS_0^{-1} est une des substitutions T_i, soit T_1; donc

$$S = SS_0^{-1} S_0 = T_1 S_0.$$

De plus, $T_\alpha S_0 \neq T_\beta S_0$, sans quoi on aurait $T_\alpha = T_\beta$.

Cherchons donc toutes les substitutions propres $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \nu & \rho \end{pmatrix}$ changeant une forme (a, b, c) en elle-même. Il faut pour cela et il suffit qu'on ait

$$(1) \qquad \lambda\rho - \mu\nu = 1,$$

$$(2) \qquad a' = a\lambda^2 + b\lambda\nu + c\nu^2 = a,$$

$$(3) \qquad b' = 2a\lambda\mu + b(\lambda\rho + \mu\nu) + 2c\nu\rho = b.$$

Ces trois équations suffisent, l'égalité du discriminant entraînant $c' = c$. D'ailleurs, l'équation $c' = a\mu^2 + b\mu\rho + c\rho^2 = c$ ne peut remplacer (1), car on veut que la substitution soit propre.

On peut écrire (3), d'après $\lambda\rho = \mu\nu + 1$,

$$(3') \qquad a\lambda\mu + b\mu\nu + c\nu\rho = 0,$$

et l'élimination de b, puis de c, entre (2) (3') donne

$$(4) \qquad a\mu + c\nu = 0,$$

$$(5) \qquad a(\lambda - \rho) + b\nu = 0,$$

(4) et (5) remplaçant (2) et (3). Soit δ le plus grand commun diviseur de $a = a'\delta$, $c = c'\delta$, premier, par conséquent, à b; (4) donne

$$\nu = -\frac{a'\mu}{c'},$$

ou, en posant $\frac{\mu}{c'} = -u'$ (entier),

$$\nu = a'u', \qquad \mu = -c'u',$$

et (5) devient, en divisant par a',

$$\delta(\lambda - \rho) + bu' = 0,$$

$$\lambda - \rho = -\frac{bu'}{\delta};$$

δ, premier à b, divise $u' = u\delta$, et l'on a

$$\lambda - \rho = -bu, \qquad \mu = -cu, \qquad \nu = au,$$

u étant un entier inconnu auxiliaire qui, introduit dans (1), donne pour quatrième équation

$$\lambda\rho = 1 - acu^2,$$

ou

$$(\lambda + \rho)^2 = (\lambda - \rho)^2 + 4\lambda\rho = Du^2 + 4.$$

Prenons un second entier inconnu auxiliaire $\lambda + \rho = t$; nous serons ramenés à un système de cinq équations :

$$(6) \qquad \begin{cases} \lambda = \dfrac{t - bu}{2}, & \mu = -cu, \\ \nu = au, & \rho = \dfrac{t + bu}{2}, \end{cases}$$

$$(7) \qquad t^2 - Du^2 = 4.$$

On voit sur cette dernière équation que t, u seront de même parité, si $D \equiv 1 \pmod 4$, donc $b \equiv 1 \pmod 2$, et que, si $D \equiv 0 \pmod 4$, donc $b \equiv 0 \pmod 2$, t sera certainement pair.

Réciproquement, t, u vérifiant (7), *les nombres* (6) *fournissent une substitution transformant* (a, b, c) *en elle-même.* Car, d'après la remarque précédente, λ, μ, ν, ρ seront entiers, et l'on vérifie sans peine que leurs valeurs (6), moyennant la condition (7), satisfont aux équations (1), (2), (3).

On voit de plus qu'à deux substitutions $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \nu & \rho \end{pmatrix}$ différentes répondent deux solutions (t, u) de (7) différentes, et réciproquement, car, d'après (6), à un système λ, μ, ν, ρ répond un seul système (t, u), et réciproquement.

Ainsi $\begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \gamma_0 & \delta_0 \end{pmatrix}$ étant une substitution particulière transformant (a, b, c) en (m, n, l), toutes les autres $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ seront de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \nu & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \gamma_0 & \delta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_0 + \mu\gamma_0 & \lambda\beta_0 + \mu\delta_0 \\ \nu\alpha_0 + \rho\gamma_0 & \nu\beta_0 + \rho\delta_0 \end{pmatrix};$$

donc

$$\alpha = \frac{\alpha_0 t - (b\alpha_0 + 2c\gamma_0)u}{2},$$

$$\beta = \frac{\beta_0 t - (b\beta_0 + 2c\delta_0)u}{2},$$

$$\gamma = \frac{\gamma_0 t + (2a\alpha_0 + b\gamma_0)u}{2},$$

$$\delta = \frac{\delta_0 t + (2a\beta_0 + b\delta_0)u}{2}.$$

Tout est donc ramené à la solution de l'équation (7). T, U désigneront toujours les plus petites solutions positives de $t^2 - Du^2 = 4$, toutes deux différentes de zéro (sauf au cas $D < -3$, où l'un des nombres T, U sera forcément supposé nul), et E(D) l'expression

$$\frac{T + U\sqrt{D}}{2}$$

que Kronecker appelle *unité fondamentale*.

Dans le cas $D > 0$, on sait que *toutes les unités* $\frac{t + u\sqrt{D}}{2}$ où t, u sont des solutions quelconques de $t^2 - Du^2 = 4$ sont contenues dans l'expression ([1])

$$\pm E(D)^n = \pm \left(\frac{T + U\sqrt{D}}{2}\right)^n \qquad (n > 0, < 0 \text{ ou } = 0).$$

([1]) Voici en quelques mots la preuve de ce théorème. Remarquons d'abord que, si (t, u) est une solution, les deux facteurs $\frac{t + u\sqrt{D}}{2}$, $\frac{t - u\sqrt{D}}{2}$, ayant pour produit 1, ont le même signe qui est celui de t ($t^2 - Du^2 = 4$ donne $|t| > |u\sqrt{D}|$), et sont, l'un > 1, l'autre < 1 en valeur absolue. Si t, u sont positifs, on dit que la solution (t, u) est positive; alors on a

$$0 < \frac{t - u\sqrt{D}}{2} < 1 < \frac{t + u\sqrt{D}}{2}.$$

Soient (t', u'), (t'', u'') deux solutions. Considérons le produit

$$(1) \qquad \frac{t' + u'\sqrt{D}}{2}\,\frac{t'' + u''\sqrt{D}}{2} = \frac{t + u\sqrt{D}}{2},$$

$$t = \frac{t't'' + Du'u''}{2}, \qquad u = \frac{t'u'' + u't''}{2}.$$

Si $D \equiv 0 \pmod 4$, t' et t'' sont pairs, et si $D \equiv 1 \pmod 4$, t' et u' sont de même parité, comme aussi t'' et u''. Donc t et u sont entiers. L'égalité (1) entraînant

Le produit

$$\frac{T+U\sqrt{D}}{2}\,\frac{T-U\sqrt{D}}{2}$$

étant égal à 1 et les facteurs étant inégaux, on aura

$$0<\frac{T-U\sqrt{D}}{2}<1<\frac{T+U\sqrt{D}}{2}.$$

---

d'ailleurs

$$(2)\qquad \frac{t'-u'\sqrt{D}}{2}\,\frac{t''-u''\sqrt{D}}{2}=\frac{t-u\sqrt{D}}{2},$$

et le produit de (1) par (2) donnant

$$t^2-Du^2=4,$$

on voit que (t, u) est une solution. Ainsi le produit d'un nombre quelconque d'unités $\frac{t^{(i)}+u^{(i)}\sqrt{D}}{2}$ est encore une unité. Soit (T, U) la plus petite solution positive; toute solution positive (t, u) est comprise dans la forme

$$\left(\frac{T+U\sqrt{D}}{2}\right)^n=\frac{t_n+u_n\sqrt{D}}{2},$$

sans quoi on aurait, pour une valeur convenable de n,

$$\frac{t_n+u_n\sqrt{D}}{2}<\frac{t+u\sqrt{D}}{2}<\frac{t_n+u_n\sqrt{D}}{2}\,\frac{T+U\sqrt{D}}{2},$$

et, en multipliant par $\frac{t_n-u_n\sqrt{D}}{2}$, qui est positif, on l'a vu,

$$1<\frac{t+u\sqrt{D}}{2}<\frac{T+U\sqrt{D}}{2};$$

(T, U) ne serait donc pas la plus petite solution positive. Chaque solution positive (t, u) fournissant toujours les quatre solutions (t, u), $(t, -u)$, $(-t, -u)$, $(-t, u)$, il est facile de voir, en observant la relation,

$$\left(\frac{T-U\sqrt{D}}{2}\right)^n=\left(\frac{T+U\sqrt{D}}{2}\right)^{-n},$$

que toutes les solutions de $t^2-Du^2=4$ sont comprises dans la formule

$$\pm\left(\frac{T+U\sqrt{D}}{2}\right)^n\qquad (n>0,\ <0 \text{ ou } =0).$$

La possibilité de résoudre en nombres entiers l'équation de Pell, d'où dépend ce qui précède, a été établie pour la première fois par Lagrange, dans ses additions à l'Algèbre d'Euler. Voir les *Vorlesungen über Zahlentheorie* de Dirichlet, §§ 85, 141, ou les *Monatsberichte* d'octobre 1843, d'avril 1842, de mars 1846, ou les *Comptes rendus* de 1840, t. X, p. 286.

Dans le cas $D < 0$, Kronecker a remarqué que l'on obtient aussi toutes les solutions par les puissances de l'unité fondamentale. Il suffit de le vérifier sur l'équation qui nous occupe

$$t^2 + |D| u^2 = 4 \qquad (D \equiv 0, 1 \bmod 4).$$

Si $D = -3$, $t^2 + 3u^2 = 4$ a $\tau = 6$ solutions,

$$t = \pm 2, \qquad u = 0,$$
$$t = \pm 1, \qquad u = \pm 1;$$

la plus petite solution positive est $t = 1$, $u = 1$, d'où

$$E(D) = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} = e^{\frac{i\pi}{3}},$$

et l'on voit que les six solutions sont fournies par

$$\pm e^{\frac{i\pi}{3}}, \qquad \pm e^{\frac{2i\pi}{3}}, \qquad \pm e^{i\pi}.$$

Si $D = -4$, $t^2 + 4u^2 = 4$ a $\tau = 4$ solutions

$$t = \pm 2, \qquad u = 0,$$
$$t = 0, \qquad u = \pm 1;$$

la plus petite solution positive est $t = 0$, $u = 1$, d'où

$$E(D) = e^{\frac{i\pi}{2}}.$$

Si $D < -4$, $t^2 + |D| u^2 = 4$ a $\tau = 2$ solutions seulement, $t = \pm 2$, $u = 0$, d'où

$$E(D) = e^{i\pi}.$$

Tous les cas précédents sont réunis dans l'expression

$$E(D) = e^{\frac{2i\pi}{\tau}}.$$

Les substitutions transformant en elle-même une forme (a, b, c) de diviseur σ sont évidemment les mêmes que celles transformant $\left(\frac{a}{\sigma}, \frac{b}{\sigma}, \frac{c}{\sigma}\right)$ en elle-même. D'ailleurs, en changeant partout dans ce qui précède

$$a, \quad b, \quad c, \quad D$$

en

$$\frac{a}{\sigma}, \quad \frac{b}{\sigma}, \quad \frac{c}{\sigma}, \quad \frac{D}{\sigma^2},$$

on arrive à

$$\lambda = \frac{t - \frac{b}{\sigma} u}{2}, \qquad \mu = -\frac{c}{\sigma} u,$$

$$\nu = \frac{a}{\sigma} u, \qquad \rho = \frac{t + \frac{b}{\sigma} u}{2},$$

$$t^2 - \frac{D}{\sigma^2} u^2 = 4,$$

ou, en posant

$$t' = \sigma t, \qquad u' = u,$$

$$\lambda = \frac{t' - bu'}{2\sigma}, \qquad \mu = -\frac{cu'}{\sigma},$$

$$\nu = \frac{au'}{\sigma}, \qquad \rho = \frac{t' + bu'}{2\sigma},$$

$$t'^2 - D u'^2 = 4\sigma^2.$$

Cela correspond à ce fait que, si (a, b, c) a le diviseur σ, donc D le diviseur σ^2, à chaque solution de

$$t^2 - \frac{D}{\sigma^2} u^2 = 4,$$

correspond une solution de

$$t'^2 - D u'^2 = 4\sigma^2,$$

obtenue par

$$t' = \sigma t, \qquad u' = u,$$

et réciproquement, car t' est nécessairement divisible par σ.

Donc la plus petite solution positive (T', U') de $t'^2 - D u'^2 = 4\sigma^2$ sera $(\sigma T, U)$, et toutes les solutions de cette équation seront comprises dans la formule

$$\pm \left(\frac{\sigma T + U\sqrt{\frac{D}{\sigma^2}}}{2} \right)^n$$

ou

$$\pm \left(\frac{T' + U'\sqrt{D}}{2} \right)^n \qquad (n > 0, \quad < 0, \quad \text{ou} \quad = 0)\ (^1).$$

(1) L'équation $t^2 - D u^2 = 1$ se ramène ainsi à $t^2 - 4 D u^2 = 4$.

§ 9. Choix avantageux du représentant d'une classe.

1. *On peut toujours trouver, pour une classe de discriminant* D, *un représentant* (a, b, c) *où a soit premier à* $2D$ *et positif.*

Soit, en effet, (a', b', c') un représentant quelconque de la classe; il suffit de prouver qu'on peut trouver deux nombres α, γ premiers entre eux tels que

$$a'\alpha^2 + b'\alpha\gamma + c'\gamma^2 = f$$

soit premier à un nombre quelconque N et positif. Soit r_1 un facteur premier de N; si a' et c' sont divisibles par r_1, et par conséquent b' premier à r_1, on rendra f premier à r_1 en prenant α, γ premiers à r_1; si l'un des coefficients extrêmes, a' par exemple, est premier à r_1, on rendra f premier à r_1 en prenant γ divisible par r_1 et α premier à r_1. Ainsi, $r_1, r_2, \ldots, r_n$ étant les facteurs premiers de N, en prenant α, γ divisibles par certains r_i, premiers à d'autres et en leur enlevant leur plus grand commun diviseur, on rendra f premier à N et α, β premiers entre eux. Si $D < 0$, comme on ne considère que les formes positives, f sera positif; si $D > 0$, il suffit de prendre d'abord $a' > 0$, ce qui est toujours possible puisque, dans une forme réduite, les coefficients extrêmes ont des signes opposés, et ensuite le rapport $\frac{\alpha}{\gamma}$ extérieur aux racines de $a'x^2 + b'x + c' = 0$.

2. *On peut maintenant trouver une forme* (a, b', c') *parallèle à* (a, b, c), *où a soit* > 0 *et premier à* $2D$, *satisfaisant en outre aux conditions*

$$b' \equiv 0 \pmod{D}, \tag{1}$$

$$\begin{cases} c' \equiv 0 \pmod{D}, & \text{si} \quad D \equiv 1 \pmod{4}, \\ c' \equiv 0 \left(\bmod \frac{D}{4}\right), & \text{si} \quad D \equiv 0 \pmod{4}. \end{cases} \tag{2}$$

En effet, la substitution $\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ change (a, b, c) en

$$(a, \quad b + 2ha, \quad c + bh + ah^2).$$

Déterminons h par

$$b + 2ha \equiv 0 \pmod{D};$$

cela est toujours possible, car, si D est pair, b est pair. Soient alors $b + 2ha = \lambda D = b'$, $c + bh + ah^2 = c'$. De $b'^2 - 4ac' = D$, on déduit

$$4ac' = D(\lambda^2 D - 1),$$

et, comme a est premier à D,

$$4c' \equiv 0 \pmod{D},$$

d'où l'on déduit les congruences (2) (¹).

3. *Au lieu des conditions* (1), (2), *on peut introduire les suivantes*

(3) $\qquad b \equiv 0 \pmod{Q}, \qquad c \equiv 0 \pmod{Q^2}, \qquad D = D_0 Q^2,$

D_0 *étant le discriminant fondamental* (²).

En effet, la substitution $\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ change la forme (a, b, c) en

$$(a, b', c'),$$
$$b' = b + 2ha, \qquad c' = c + bh + ah^2,$$

et l'on peut d'abord trouver h tel que

(4) $\qquad b' = b + 2ha \equiv 0 \pmod{Q} = kQ,$

congruence toujours possible, car, si Q est pair, b est pair. Posons $Q = 2^\lambda Q'$, $Q' \equiv 1 \pmod{2}$, et soit h_0 une solution de (4) rendant b' divisible par $2^\mu \left(\mu \geq \lambda \text{ et } \frac{b'}{2^\mu} \text{ impair}\right)$. Si $\lambda > 0$, h n'étant déterminé qu'à un multiple près de $\frac{Q}{2}$, on n'aura qu'à augmenter h_0 de $\frac{Q}{2}$ pour que b' ne soit pas divisible par une puissance de 2 supérieure à 2^λ. On peut donc toujours rendre k impair. Cela

---

(¹) Kronecker paraît supposer qu'on peut toujours rendre b' et c' divisibles simultanément par D. Si $D \equiv 0 \pmod{4}$, c'est évidemment impossible, car $b'^2 - 4ac$ serait divisible par 4D. (Voir *Sitzungsberichte*, pp. 776, 777; 1885).

(²) Énoncé par Kronecker (*Sitzungsberichte*, p. 220; 1889).

posé, remarquons que $b'^2 - 4ac' = D$ donne

$$(5) \qquad 4ac' = Q^2(k^2 - D_0).$$

Si $D_0 \equiv 1 \pmod 4$, k étant supposé impair, on voit que

$$c' \equiv 0 \pmod{Q^2},$$

puisque a est premier à $D = D_0 Q^2$.

Si $D_0 \equiv 0 \pmod 4$, b est pair, et l'on pourra, au lieu de (4), résoudre la congruence

$$b + 2ha \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2Q) = kQ.$$

Alors k sera pair et (5) donnera encore

$$c' \equiv 0 \pmod{Q^2}.$$

Si $\lambda = 0$, k ayant la parité de D_0, (5) donne de même

$$c \equiv 0 \pmod{Q^2}.$$

La parité de k, qui est toujours celle de D_0, est indépendante de la classe à laquelle appartient (a, b, c). Donc les seconds coefficients de toutes les formes obtenues en prenant dans chaque classe un représentant satisfaisant aux conditions actuelles seront tous congrus $(\mathrm{mod}\, 2Q)$.

4. *Soit* (a, b, c) *une forme où* a *est premier à* $2D$ *et positif; on peut toujours trouver une forme parallèle* (a, b', c'), *où* b' *et* c' *soient divisibles à la fois par* $\frac{D}{4}$ *si* $D \equiv 0 \pmod 4$, *par* D, *si* $D \equiv 1 \pmod 4$, *et, en outre, par tous les facteurs de* Q.

En effet, si $D \equiv 1 \pmod 4$, on peut trouver, comme il a été dit, une forme (a, b', c') où

$$b' \equiv 0 \pmod D, \qquad c' \equiv 0 \pmod D.$$

Si $D \equiv 0 \pmod 4$, on peut trouver une forme parallèle (a, b', c') où

$$b' \equiv 0 \pmod D, \qquad c' \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\, \frac{D}{4}\right);$$

elle remplit les conditions voulues si Q est impair, ou si, Q étant pair, $D \equiv 0 \pmod 8$.

Reste le cas où $D_0 \equiv 1 \pmod 4$, $Q \equiv 2 \pmod 4$. On peut alors prendre h tel que

$$b' = b + 2ha \equiv 0 \pmod{2D_0} = 2\lambda D_0,$$

car b est pair. h étant déterminé $(\bmod D_0)$, on pourra, en lui ajoutant au besoin D_0, rendre λ impair, et comme on a

$$4ac' = b'^2 - D,$$
$$ac' = D_0\left(\lambda^2 D_0 - \frac{Q^2}{4}\right),$$

on aura aussi

$$c' \equiv 0 \quad \pmod{4D_0},$$

puisque $D_0 \equiv 1 \pmod 4$.

Je dirai qu'une forme satisfaisant aux conditions de la proposition 4 est une *forme normale*. J'appellerai *diviseur normal* tout diviseur divisant à la fois D et les deux derniers coefficients d'une forme normale.

5. *Soient* $D = 2^k D'$, $D' \equiv 1 \pmod 2$, $k \geqq 0$, *et* (a, b, c) *une forme satisfaisant aux conditions du second théorème. On peut trouver une forme parallèle* (a, b', c') *remplissant les conditions suivantes :*

$$k \text{ pair} = 2k' \quad \begin{cases} b' \equiv 0 \pmod{2^{k'} D'}, & c' \equiv 0 \pmod{2^{2k'-1} D'}, \\ \dfrac{b}{2^{k'}} \equiv 1 \pmod 2; \end{cases}$$

$$k \text{ impair} = 2k' + 1 \quad \begin{cases} b' \equiv 0 \pmod{2^{k'+1} D'}, & c' \equiv 0 \pmod{2^{2k'-1} D'}. \\ \dfrac{c'}{2^{2k'-1}} \equiv 1 \pmod 2). \end{cases}$$

Soit d'abord $k = 2k'$. On peut trouver h tel que

$$(6) \qquad b' = b + 2^{k'} ha \equiv 0 \quad \pmod{2^{k'} D'} = 2^{k'} \lambda D',$$

et, en ajoutant au besoin à h un multiple impair de D', on pourra rendre λ impair. On aura ensuite

$$4ac' = b'^2 - D = 2^{2k'} D'(\lambda^2 D' - 1),$$
$$c' \equiv 0 \quad \pmod{2^{2k'-1} D'}.$$

$\dfrac{b'}{2^{k'}}$ est impair, car sans cela $b'^2 - 4ac'$ serait divisible par $2^{2k'+1}$.

Soit $k = 2k' + 1$. On déterminera h par (6); mais on prendra λ

pair, en sorte que

$$b' \equiv 0 \pmod{2^{k'+1} D'}.$$

On aura ensuite

$$4ac' = b'^2 - D = 2^{2k'} D'(\lambda^2 D' - 2),$$
$$c' \equiv 0 \pmod{2^{2k'-1} D'}.$$

$\frac{c'}{2^{2k'-1}}$ est impair, car sans cela $b'^2 - 4ac'$ serait divisible par $2^{2k'+2}$.

Je dirai qu'une forme déterminée par les conditions du présent théorème est *binormale* et j'appellerai *binormal* tout diviseur de D qui divise les deux derniers coefficients d'une forme binormale.

§ 10. Représentation des nombres par les formes quadratiques.

On dit qu'un nombre m est *proprement* représentable par une forme (a, b, c) quand on peut trouver deux nombres α, γ *premiers entre eux* tels que

$$(1) \qquad m = a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2.$$

Cherchons les conditions nécessaires et suffisantes pour que cela ait lieu.

Supposons d'abord m représentable par (a, b, c) sous la forme (1), α, γ étant premiers entre eux. On pourra trouver une infinité de nombres β, δ tels que

$$(2) \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Soit β, γ un couple de solutions; appliquons à (a, b, c) la substitution $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Le premier coefficient de la nouvelle forme sera

$$a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2 = m,$$

le deuxième

$$(3) \qquad 2a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2c\gamma\delta = (2a\alpha + b\gamma)\beta + (b\alpha + 2c\gamma)\delta = n,$$

et le troisième l se tire de

$$(4) \qquad n^2 - 4ml = D.$$

Ainsi

$$(5) \qquad n^2 \equiv D \pmod{4m}.$$

et remarquons de suite que si n est une solution de cette congruence, $n + 2m$ en sera évidemment une autre constituant avec le premier un *couple*.

Donc s'il existe une représentation propre (α, γ) de m par (a, b, c) : 1° il y a une infinité de substitutions $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ changeant (a, b, c) en (m, n, l) n ayant la forme (3) et l étant corrélativement déterminé par (4) ; 2° D sera reste quadratique de $4m$. Ce sont là des conditions nécessaires et la seconde est contenue dans la première.

1° *Réciproquement*, s'il existe une substitution $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ changeant une forme (a, b, c) en une autre dont le premier coefficient soit m, m est évidemment représentable par (a, b, c), et D est forcément reste quadratique de $4m$.

2° Si D est reste quadratique de $4m$ les formes (m, n, l) qui se déduisent de (4) ne sont pas nécessairement équivalentes à (a, b, c) puisqu'elles ne le sont pas entre elles : les formes opposées (m, n, l), $(m, -n, l)$ en fournissent un exemple.

Il y a lieu de faire ici les remarques suivantes.

Chaque représentation (α, γ) *conduit à un seul couple* (n_1, n_2) $[n_1 \equiv n_2 \pmod{2m}]$ *de solutions de* (5).

En effet, β_0, δ_0 étant solutions de (2), toutes les autres sont comprises dans les formes

$$(6) \qquad \beta = \beta_0 + \lambda\alpha, \qquad \delta = \delta_0 + \lambda\gamma \qquad (\lambda \text{ entier quelconque}),$$

et, si n_0 est la valeur de n répondant à β_0, δ_0 par (3), les valeurs de n répondant à β, δ sont comprises dans la forme

$$(7) \qquad n = n_0 + 2m\lambda,$$

comme le montre la relation (3) elle-même.

Donc toutes les racines n de (4) qui se déduisent ainsi d'une représentation propre (α, γ) appartiennent à une même classe $(\text{mod}\, 2m)$, donc à deux classes $(\text{mod}\, 4m)$, qui peuvent être représentées par un couple (n_1, n_2) de racines de la congruence (5). Les deux formes (m, n_1, l_1), (m, n_2, l_2) répondant aux deux racines n_1, n_2 d'un couple sont évidemment équivalentes, puisqu'elles sont parallèles $[n_1 \equiv n_2 \pmod{2m}]$.

Un couple (n_1, n_2) *conduisant à une représentation* (α, γ), *c'est-à-dire à deux formes parallèles* (m, n_i, l_i) $(i = 1, 2;$ $n_i^2 - 4ml_i = D)$ *telles qu'il existe une substitution* $\begin{pmatrix} \alpha & \beta_i \\ \gamma & \delta_i \end{pmatrix}$ *changeant* (a, b, c) *en* (m, n_i, l_i) *conduit une seule fois à la représentation* (α, γ).

En effet, soient β_0, δ_0 deux solutions quelconques de (2), n_0 étant défini par (3). La substitution $\begin{pmatrix} \alpha & \beta_0 \\ \gamma & \delta_0 \end{pmatrix}$ change (a, b, c) en (m, n_0, l_0), l_0 étant défini par $n_0^2 - 4ml_0 = D$. Toutes les solutions de (2) sont de la forme

$$\beta = \beta_0 + \lambda\alpha, \qquad \delta = \delta_0 + \lambda\gamma,$$

et le coefficient n correspondant à chacune d'elles est donné par

$$n = n_0 + 2m\lambda.$$

Donc à n_i correspond un λ unique, soit $\lambda_i = \frac{n_i - n_0}{2m}$, et par suite un seul couple

$$\beta_i = \beta_0 + \lambda_i\alpha, \qquad \delta_i = \delta_0 + \lambda_i\gamma.$$

La représentation (α, γ) est dite *appartenir* au couple (n_1, n_2).

Pour un couple (n_1, n_2) auquel appartiennent des représentations de m par (a, b, c), il y aura autant de ces représentations qu'il y a de transformations de (a, b, c) en (m, n_i, l_i) c'est-à-dire autant de fois que l'équation $t^2 - Du^2 = 4$ a de solutions.

Si l'on réunit dans un même *groupe* ces τ représentations de m appartenant à un même couple, il y aura autant de groupes de représentations par la forme (a, b, c) qu'il y a de couples (n_1, n_2) fournissant par (4) des formes (non parallèles) équivalentes à (a, b, c). Considérons maintenant toutes les classes de discriminant D et prenons dans chacune d'elles une forme représentante. Si $\psi(D, 4m)$ est le nombre des solutions de (5) qui sont incongrues $(\text{mod}\, 4m)$, il y aura évidemment $\frac{1}{2}\psi(D, 4m)$ groupes de représentations du nombre m par toutes ces formes représentantes.

Deux formes équivalentes peuvent évidemment représenter les mêmes nombres, car si

$$x = \alpha x' + \beta y', \qquad y = \gamma x' + \delta y',$$
$$a' = a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2, \qquad c' = a\beta^2 + b\beta\delta + c\delta^2,$$
$$b' = 2a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2c\gamma\delta,$$

on aura

$$ax^2 + bxy + cy^2 = a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2;$$

ou bien, si (a, b, c) représente m, elle équivaut à une forme (m, n_i, l_i); donc (a', b', c') équivalente à (a, b, c) l'est à (m, n_i, l_i) et, par suite, représente m.

Inversement, deux formes pouvant représenter le même nombre m par des représentations appartenant au même couple (n_1, n_2) de racines de (5) sont équivalentes entre elles, car elles le sont toutes deux à (m, n_1, l_1) ou à (m, n_2, l_2)..

Il convient d'ajouter ici quelques observations [1]. D'abord, quand on connaît une représentation (α, γ), on peut trouver n sans calculer β, δ, car (2) et (3) linéaires en β, δ donnent

$$-2m\beta = \alpha(b - n) + 2c\gamma,$$
$$2m\delta = 2a\alpha + \gamma(b + n),$$

d'où

$$n\alpha \equiv b\alpha + 2c\gamma, \qquad -n\gamma \equiv 2a\alpha + b\gamma, \qquad (\text{mod } 2m),$$

qui définissent $n \pmod{2m}$.

S'il y a deux nombres α, γ satisfaisant à

$$(8) \qquad \begin{cases} a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2 = m, \\ \alpha(b - n) + 2c\gamma \equiv 0 \quad (\text{mod } 2m), \\ 2a\alpha + \gamma(b + n) \equiv 0 \quad (\text{mod } 2m), \end{cases}$$

a, b, c, m, n étant donnés, la forme (a, b, c) équivaut à (m, n, l) (l défini par $n^2 - 4ml = D = b^2 - 4ac$).

Écrivons, en effet, les deux congruences sous forme d'équation

$$\alpha(b - n) + 2c\gamma = -2m\beta,$$
$$2a\alpha + \gamma(b + n) = 2m\delta.$$

L'élimination de n donne

$$2m = 2m(\alpha\delta - \beta\gamma).$$

Donc $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ et $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ change (a, b, c) en une forme dont

---

[1] Voir DIRICHLET. *Vorlesungen über Zahlentheorie*, § 60.

le premier coefficient est $a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2 = m$ et le second

$$\begin{aligned}2a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2c\gamma\delta &= \beta(2a\alpha + b\gamma) + \delta(b\alpha + 2c\gamma)\\ &= \beta(2m\delta - n\gamma) + \delta(n\alpha - 2m\beta)\\ &= n(\alpha\delta - \beta\gamma) = n,\end{aligned}$$

enfin le troisième $\dfrac{n^2 - D}{4m} = l$.

Réciproquement, si (a, b, c), (m, n, l) sont équivalentes, il y a toujours deux nombres α, γ satisfaisant à (8). Car soit $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ une substitution transformant (a, b, c) en (m, n, l); on aura

$$\begin{aligned}m &= a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2,\\ n &= 2a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2c\gamma\delta,\\ \alpha\delta &- \beta\gamma = 1.\end{aligned}$$

Les deux dernières résolues par rapport à β, δ donnent, comme tout à l'heure,

$$\begin{aligned}-2m\beta &= \alpha(b - n) + 2c\gamma,\\ 2m\delta &= 2a\alpha + \gamma(b + n),\end{aligned}\qquad \text{C. Q. F. D.}$$

§ 11. De la congruence $x^2 \equiv D \pmod{k}$. Application.

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_r$ des nombres premiers entre eux deux à deux, $f(x)$ un polynôme entier en x à coefficients numériques entiers, et la congruence

$$(1)\qquad f(x) \equiv 0 \pmod{a_1 a_2 \ldots a_r}.$$

Toute racine de (1) doit vérifier les r congruences

$$f(x) \equiv 0 \pmod{a_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Inversement, si x_i est solution de $f(x) \equiv 0 \pmod{a_i}$, tout nombre x satisfaisant aux congruences simultanées toujours compatibles ([1]),

$$(2)\qquad x \equiv x_i \pmod{a_i},$$

satisfera à

$$f(x) \equiv f(x_i) \equiv 0 \pmod{a_i},$$

[1] *Voir* DIRICHLET, *Zahlentheorie*, §§ 25, 35 et 37.

et, les a_i étant premiers entre eux deux à deux, à

$$f(x) \equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} a_1 a_2 \ldots a_r).$$

Or, le système (2) n'a qu'une solution $(\operatorname{mod} a, a_1, \ldots, a_r)$. Donc, si n_i est le nombre des racines x_i, celui des racines de (1) sera $n_1 n_2 \ldots n_r$. Remarquons, en outre, que (1) n'est possible que si toutes les congruences $f(x) \equiv 0 \pmod{a_i}$ le sont et que, si toutes ces congruences sont possibles, (1) aura précisément $n_1 n_2 \ldots n_r$ racines.

On sait de plus que $x^2 \equiv D \pmod{2^\alpha}$, D étant impair a toujours une racine unique si $\alpha = 1$, deux si $\alpha = 2$ pourvu que $D \equiv 1 \pmod{4}$, quatre si $\alpha > 2$ pourvu que $D \equiv 1 \pmod{8}$, mais n'en a aucune dans ces deux derniers cas, si les conditions marquées ne sont pas remplies. Enfin, si p est premier impair et D premier à p, la congruence

$$x^2 \equiv D \qquad (\operatorname{mod} p^\alpha)$$

a deux racines ou aucune selon que $\left(\frac{D}{p}\right) = +1$, ou $= -1$.

Soit maintenant d'une façon générale ([1]) une congruence supposée possible

$$(3) \qquad x^2 \equiv D \qquad (\operatorname{mod} k),$$

où k, D ont un plus grand commun diviseur $d = sc^2$, c^2 étant le plus grand diviseur carré de d, et $D = sc^2 D'$, $k = sc^2 k'$. La congruence étant possible par hypothèse, toute racine x sera de la forme $x = scx'$, et pour trouver x, il suffira de trouver x' vérifiant

$$(4) \qquad sx'^2 \equiv D' \qquad (\operatorname{mod} k').$$

Or k' est premier à s, sans quoi D' serait divisible par leur plus grand commun diviseur, d'après la congruence (4) supposée possible. Donc on peut trouver λ, μ tels que

$$(5) \qquad \lambda s - \mu k' = 1,$$

et (4) devient

$$sx'^2 \equiv D'(\lambda s - \mu k') \qquad (\operatorname{mod} k'),$$
$$sx'^2 \equiv D'\lambda s \qquad (\operatorname{mod} k'),$$

([1]) Comparer LEGENDRE, *Théorie des nombres*, troisième édition, t. I, p. 254, pour le cas où $k \equiv 2 \pmod{4}$.

qui équivaut (s étant premier avec k') à

$$(6) \qquad x'^2 \equiv D'\lambda \pmod{k'},$$

et λ est premier à k' d'après (5). Soit x'_0 une racine de (6); tous les nombres

$$x' = x'_0 + mk$$

seront également racines, et toutes les racines de $x^2 \equiv D \pmod{k}$ répondant à x'_0 seront

$$x = scx'_0 + msck'.$$

On voit que les valeurs $m = 0, 1, 2, \ldots, c-1$ donnent c racines incongrues ($\bmod k = sc^2k'$). Donc à chaque racine de (6) correspondent c racines de (3).

Cherchons maintenant à quelles conditions $x^2 \equiv D \pmod{k}$ sera possible. Si $k = 2^\alpha p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$ il faut et suffit que les $r+1$ congruences

$$x^2 \equiv D \pmod{p_i^{\alpha_i}}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, r), \qquad x^2 \equiv D \pmod{2^\alpha},$$

soient possibles. Considérons d'abord le premier type

$$x^2 \equiv D \pmod{p_i^{\alpha_i}},$$

et soit $D = p_i^{\beta_i} D_i$, D_i étant premier à p_i.

1° $\beta_i \geqq \alpha_i$, $D \equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$. Si α_i est pair, $\alpha_i = 2\alpha'_i$, il y a $c = p_i^{\frac{\alpha_i}{2}}$ racines incongrues ($\bmod p_i^{\alpha_i}$), savoir

$$p_i^{\alpha'_i}, \quad 2p_i^{\alpha'_i}, \quad 3p_i^{\alpha'_i}, \quad \ldots, \quad p_i^{2\alpha'_i}.$$

Si α_i est impair, $\alpha_i = 2\alpha'_i - 1$, il y a $c = p^{\frac{\alpha_i - 1}{2}}$ racines incongrues ($\bmod p_i^{\alpha_i}$), savoir

$$p_i^{\alpha'_i}, \quad 2p_i^{\alpha'_i}, \quad \ldots, \quad p_i^{2\alpha'_i - 1}.$$

Ces résultats sont d'ailleurs immédiats.

2° $\beta_i < \alpha_i$. Si $\beta_i = 2\beta'_i$, on est ramené à la congruence

$$x'^2 \equiv D_i \pmod{p_i^{\alpha_i - \beta_i}},$$

qui n'est possible que si $\left(\frac{D_i}{p_i}\right) = +1$, et la proposée a alors $2p_i^{\frac{\beta_i}{2}}$ racines.

Si $\beta_i = 2\beta'_i + 1$, on est ramené à

$$p_i x'^2 \equiv D_i \pmod{p_i^{\alpha_i - \beta_i}} \quad \text{impossible.}$$

Considérons maintenant le second type

$$x^2 \equiv D \pmod{2^\alpha},$$

et soit $D = 2^\beta D'$, $D' \equiv 1 \pmod 2$.

1° $\beta \geqq \alpha$. Ce cas se traite comme celui des facteurs impairs.
2° $\beta < \alpha$. Si β est pair, $\beta = 2\beta'$, on est ramené à

$$(7) \qquad x'^2 \equiv D' \pmod{2^{\alpha-\beta}}.$$

Si $\alpha - \beta = 1$, (7) a une racine, donc la proposée en a $2^{\beta'}$.
Si $\alpha - \beta = 2$, (7) a deux racines ou point, selon que $D' \equiv +1$ ou $\equiv -1 \pmod 4$, donc la proposée en a $2.2^{\beta'}$ si $D' \equiv +1 \pmod 4$ et o si $D' \equiv -1 \pmod 4$. Si $\alpha - \beta > 2$, on voit de même que la proposée a $4.2^{\beta'}$ racines si $D' \equiv 1 \pmod 8$ et o si $D' \equiv 3, 5, 7 \pmod 8$.
Si β est impair, $\beta = 2\beta' + 1$, on voit, comme dans le cas des facteurs impairs, que la congruence $x^2 \equiv D \pmod{2^\alpha}$ est impossible.
On déduit de là, dans chaque cas, le nombre des solutions $\psi(D, k)$ de (3) au moyen de la propriété

$$\psi(D, mn) = \psi(D, m)\,\psi(D, n) \qquad (m \text{ premier à } n),$$

qui donne ici

$$\psi(D, k) = \psi(D, 2^\alpha)\,\psi(D, p_1^{\alpha_1})\ldots\psi(D, p_r^{\alpha_r}).$$

Application. — $D = D_0 Q^2$ est un discriminant dont le discriminant fondamental est D_0, $k = 4A$, et A est premier à Q^2. Soit $A = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r} 2^{\alpha_0}$; on a à résoudre

$$x^2 \equiv D_0 Q^2 \pmod{p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r} 2^{\alpha_0 + 2}} \qquad \alpha_0 + 2 = \alpha.$$

Il faut et suffit, pour la possibilité, que les congruences

$$x^2 \equiv D \pmod{p_i^{\alpha_i}}, \qquad x^2 \equiv D \pmod{2^{\alpha_0 + 2}}$$

soient possibles. Remarquons que les p_i sont simples dans D_0 et étrangers à Q, et que, si $\alpha_0 > 1$, Q est impair.

Considérons le premier type

$$x^2 \equiv D \quad (\bmod\ p_i^{\alpha_i}).$$

Si D_0 est premier à p_i, cette congruence n'est possible que si $\left(\frac{D_0}{p}\right) = +1$, et elle a alors deux racines $(\bmod\, p_i^{\alpha_i})$.

Si D_0 contient p_i, on a $\beta_i = 1$, $\beta_i \leqq \alpha_i$, et la congruence est impossible à moins que $\alpha_i = 1$, auquel cas elle a *une* racine $(\bmod\, p_i^{\alpha_i})$.

Considérons le second type

$$x^2 \equiv D \quad (\bmod\ 2^{\alpha_0+2}).$$

Si $\alpha_0 = 0$ (A impair), comme $D \equiv 1 \pmod 4$ ou $\equiv 0 \pmod 4$, la congruence est toujours possible et a deux racines $(\bmod\, 2^{\alpha})$.

Si $\alpha_0 \geqq 1$, Q est impair, et l'on a $\frac{D_0}{4} \equiv -1 \pmod 4$, quand $D_0 \equiv 4 \pmod 8$. Le Tableau suivant indique les résultats.

D_0.	$\alpha_0 = 1$, $\alpha = 3$.	$\alpha_0 \geqq 2$, $\alpha \geqq 4$.
$D_0 \equiv 1 \pmod 8$.	4 racines.	4 racines.
$D_0 \equiv 5 \pmod 8$.	Impossible.	Impossible.
$D_0 \equiv 4 \pmod 8$, $\beta = 2$.	2 racines.	Impossible.
$D_0 \equiv 8 \pmod{16}$, $\beta = 3$.	2 racines.	Impossible.
Quel que soit D_0.	$2\left[1+\left(\frac{D}{2}\right)\right]$.	$2\left(\frac{D}{2}\right)\left[1+\left(\frac{D}{2}\right)\right]$.

On déduit de cette discussion une expression utile de la série

$$S = \sum_{A} \frac{\frac{1}{2}\psi(D, 4A)}{A^s} \qquad (s > 1),$$

la sommation s'étendant à tous les nombres positifs premiers à Q^2 [$\psi(D, 4A)$ pouvant être nul]. Cette série est le produit des suites

$$1 + \frac{1}{p_i^s},$$

$$1 + \frac{2}{q_i^s} + \frac{2}{q_i^{2s}} + \frac{2}{q_i^{3s}} + \ldots = \frac{1 + \frac{1}{q_i^s}}{1 - \frac{1}{q_i^s}},$$

$$1 + \left[1 + \left(\frac{D}{2}\right)\right]\left(\frac{Q^2}{2}\right)\frac{1}{2^s} + \left(\frac{D}{2}\right)\left[1 + \left(\frac{D}{2}\right)\right]\left(\frac{1}{4^s} + \frac{1}{8^s} + \frac{1}{16^s} + \ldots\right),$$

où p_i parcourt les facteurs premiers impairs de D_0, q_i les nombres premiers impairs étrangers à $D_0 Q^2 = D$ et dont D_0 ou D est reste quadratique. La troisième suite peut immédiatement se simplifier. En effet, si Q est pair, elle se réduit à 1. Si Q est impair et D_0 pair, elle se réduit à

$$1 + \frac{1}{2^s} = \frac{1 + \frac{1}{2^s}}{1 - \left(\frac{D}{2}\right)\frac{1}{2^s}}.$$

Si, Q étant toujours impair, D_0 est impair, distinguons deux cas : ou bien $D_0 \equiv 1 \pmod 8$ et la troisième suite devient

$$1 + 2\left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{2s}} + \ldots\right) = \frac{1 + \frac{1}{2^s}}{1 - \left(\frac{D}{2}\right)\frac{1}{2^s}},$$

ou bien $D_0 \equiv 5 \pmod 8$ et elle devient

$$1 = \frac{1 + \frac{1}{2^s}}{1 - \left(\frac{D}{2}\right)\frac{1}{2^s}}.$$

Ainsi, quand Q est pair,

$$S = \prod\left(1 + \frac{1}{p_i^s}\right)\prod\frac{1 + \frac{1}{q_i^s}}{1 - \frac{1}{q_i^s}},$$

et quand Q est impair,

$$S = \prod\left(1 + \frac{1}{p_i^s}\right)\prod\frac{1 + \frac{1}{q_i^s}}{1 - \frac{1}{q_i^s}}\;\frac{1 + \frac{1}{2^s}}{1 - \left(\frac{D}{2}\right)\frac{1}{2^s}}.$$

Donc, que Q soit pair ou impair,

$$S = \prod_q \frac{1 + \frac{1}{q^s}}{1 - \left(\frac{D}{q}\right)\frac{1}{q^s}},$$

q parcourant tous les facteurs premiers étrangers à Q; car le dénominateur se réduit à l'unité si q est contenu dans D_0, et devient égal au numérateur si D n'est pas reste quadratique de q.

On peut écrire

$$S = \prod \frac{\left(1 - \frac{1}{q^s}\right)^{-1}\left[1 - \left(\frac{D}{q}\right)\frac{1}{q^s}\right]^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{q^{2s}}\right)^{-1}}.$$

ou

$$(8) \qquad \sum_{A} \frac{\frac{1}{2}\psi(D, 4A)}{A^s} = \frac{\sum \frac{1}{A^s} \sum \left(\frac{D}{A}\right)\frac{1}{A^s}}{\sum \frac{1}{A^{2s}}} \qquad (s > 1),$$

A parcourant tous les nombres premiers à Q, positifs.

CHAPITRE III.

COMPOSITION DES FORMES [1].

§ 12. Définition et théorèmes fondamentaux.

Je donnerai d'abord une démonstration tout élémentaire d'un lemme indispensable.

Si $b^2 \equiv d \pmod{4a}$, $b'^2 \equiv d \pmod{4a'}$ (*b et b' sont donc de même parité*), *et si les trois nombres* a, a', $\frac{b+b'}{2}$ *n'ont pas de diviseur commun, il y a une classe de nombres* $B \pmod{2aa'}$ *et une seule telle que*

$$B \equiv b \pmod{2a}, \quad B \equiv b' \pmod{2a'}, \quad B^2 \equiv d \pmod{4aa'} \text{ [2]}.$$

En effet, les deux premières congruences

$$(1) \qquad B \equiv b \pmod{2a}, \quad B \equiv b' \pmod{2a'}$$

sont toujours compatibles, car la première donne

$$B = b - 2at$$

et, d'après la seconde, t sera déterminé par

$$(2) \qquad 2at \equiv b - b' \pmod{2a'}.$$

Or, δ étant le plus grand commun diviseur de a, a', donc 2δ celui de $2a$, $2a'$, 2δ divise $b - b'$, car de

$$b^2 \equiv d \pmod{4a}, \quad b'^2 \equiv d \pmod{4a'}$$

(1) Il ne s'agit ici que des formes quadratiques de même déterminant. Comparer le supplément X de M. Dedekind aux *Vorlesungen über Zahlentheorie* de Dirichlet.

(2) *Comparer* GAUSS, *Disq.*, art. 234 et suiv.; DIRICHLET, *De formarum binariarum compositione.*

on tire

$$b^2 - b'^2 = 4ac - 4a'c' \qquad (c, c' \text{ entiers}),$$

$$\frac{b+b'}{2}\,\frac{b-b'}{2} = ac - a'c',$$

et comme, par hypothèse, δ est premier à $\frac{b+b'}{2}$, il divise $\frac{b-b'}{2}$.

Ainsi t sera déterminé à un multiple près de $\frac{2a'}{2\delta}$ et toutes les solutions de (1) seront comprises dans la forme

$$B_0 + \mu \frac{2aa'}{\delta},$$

B_0 étant l'une d'elles. Il s'agit de prouver qu'on peut trouver une classe de nombres μ (mod δ) tels que

$$\left(B_0 + \mu \frac{2aa'}{\delta}\right)^2 \equiv d \qquad (\text{mod}\, 4aa'),$$

$$B_0^2 + \frac{4\mu aa'}{\delta} B_0 + \left(\frac{2aa'}{\delta}\right)^2 \mu^2 \equiv d \qquad (\text{mod}\, 4aa'). \tag{3}$$

Or

$$B_0^2 \equiv b^2 \equiv d \qquad (\text{mod}\, 4a),$$
$$B_0^2 \equiv b'^2 \equiv d \qquad (\text{mod}\, 4a');$$

donc $B_0^2 - d$, divisible par $4a$ et par $4a'$, l'est par leur plus petit multiple commun $\frac{16aa'}{4\delta} = \frac{4aa'}{\delta}$. Posons donc dans (3)

$$B_0^2 - d = \frac{4aa'}{\delta} K,$$

et divisons par $\frac{4aa'}{\delta}$; il viendra

$$K + B_0 \mu + \frac{aa'}{\delta} \mu^2 \equiv 0 \qquad (\text{mod}\, \delta).$$

Or $\frac{aa'}{\delta} \equiv 0$ (mod δ) et il reste

$$B_0 \mu + K \equiv 0 \qquad (\text{mod}\, \delta). \tag{4}$$

Cette congruence est possible, car B_0 est premier à δ. En effet, comme

$$B_0 = b + 2\lambda a = b' + 2\lambda' a',$$

si un diviseur impair de δ divisait B_0, donc B_0, a, a', il diviserait

b, b' donc $\frac{b+b'}{2}$, a, a' contre l'hypothèse. Si maintenant 2 divisait B_0 et δ, donc a, a', b, b', on aurait, a, a', b, b' étant pairs, d'après les congruences données

$$b^2 \equiv b'^2 \pmod 8, \qquad (b-b')(b+b') \equiv 0 \pmod 8,$$

donc b et b' sont ensemble de la forme $4n+2$ ou $4n$, et, par suite, $\frac{b+b'}{2}$, a, a' auraient le diviseur commun 2 contre l'hypothèse.

Ainsi (4) détermine $\mu \pmod\delta$ et $B_0 + \mu\frac{2aa'}{\delta}$ représente la classe des nombres cherchés $B \pmod{2aa'}$.

Il convient de remarquer que a, a', B sont premiers entre eux, car un diviseur commun δ donnerait lieu, d'après (1), aux congruences

$$B \equiv b \equiv b' \pmod{2\delta}, \qquad \frac{b+b'}{2} \equiv B \pmod\delta,$$

et a, a', $\frac{b+b'}{2}$ ne seraient pas premiers entre eux.

(a, b, c), (a', b', c') sont *accordées* ou *unies* si a, a', $\frac{b+b'}{2}$ sont premiers entre eux, les discriminants b^2-4ac, $b'^2-4a'c'$ étant égaux. Il y a alors, d'après ce qu'on vient de voir, une infinité de formes (aa', B, C) de même discriminant

$$D = b^2 - 4ac = b'^2 - 4a'c',$$

parallèles entre elles, où

$$B \equiv b \pmod{2a} \qquad B \equiv b' \pmod{2a'}.$$

Chacune de ces formes est dite *composée* de (a, b, c) et de (a', b', c') (¹).

Remarquons que (a, b, c), (a', b', c') sont respectivement équivalentes à $(a, B, a'C)$, (a', B, aC) et que ces dernières sont unies, car a, a', $\frac{B+B}{2} = B$ sont premiers entre eux d'après une remarque précédente.

Soient maintenant x, y, x', y' des variables et posons

$$(5)\quad \begin{cases} X = xx' - Cyy', \\ Y = axy' + a'x'y + Byy' = \frac{1}{2}[(2ax+By)y' + (2a'x'+By')y]; \end{cases}$$

(¹) GAUSS, *Disq.*, art. 235, 242 et suivants.

on aura

$$[2ax+(B+\sqrt{D})y][2a'x'+(B+\sqrt{D})y']$$
$$=4aa'xx'+2(axy'+a'x'y)(B+\sqrt{D})+(B+\sqrt{D})^2yy',$$

et comme

$$(B+\sqrt{D})^2=B^2+2B\sqrt{D}+B^2-4aa'C=2B(B+\sqrt{D})-4aa'C,$$

$$(6)\quad [2ax+(B+\sqrt{D})y][2a'x'+(B+\sqrt{D})y']=4aa'X+2(B+\sqrt{D})Y.$$

Changeons-y $\sqrt{D}$ en $-\sqrt{D}$ et multiplions les deux égalités; il vient

$$[(2ax+By)^2-Dy^2][(2a'x'+By')-Dy'^2]=(4aa'X+2BY)^2-4DY^2,$$

ou, en développant et en divisant par $16aa'$,

$$(7)\quad (ax^2+Bxy+a'Cy^2)(a'x'^2+Bx'y'+aCy'^2)=aa'X^2+BXY+CY^2,$$

c'est-à-dire que, par la substitution bilinéaire (5), la forme (aa', B, C) devient le produit des deux formes $(a, B, a'C)$, (a', B, aC).

Le théorème essentiel de la composition des formes est que, si deux formes accordées (a, b, c), (a', b', c') sont respectivement équivalentes à deux autres formes accordées (m, n, l) (m', n', l'), la forme (aa', B, C) composée des premières équivaut à la forme (mm', N, L) composée des secondes.

Tout d'abord $(a, B, a'C)$, (a', B, aC) étant équivalentes à $(m, N, m'L)$, (m', N, mL), on pourra trouver quatre nombres x, y, x', y' (§ 10) satisfaisant aux conditions

$$(8)\quad ax^2+Bxy+a'Cy^2=m,\qquad a'x'^2+Bx'y'+aCy'^2=m',$$
$$(9)\quad x(B-N)+2a'Cy\equiv 0 \pmod{2m},\qquad 2ax+y(B+N)\equiv 0 \pmod{2m},$$
$$(10)\quad x'(B-N)+2aCy'\equiv 0 \pmod{2m'},\qquad 2a'x'+y'(B+N)\equiv 0 \pmod{2m'},$$

et il suffit de prouver qu'on peut encore trouver deux entiers X, Y tels que

$$(11)\quad aa'X^2+BXY+CY^2=mm',$$
$$(12)\quad (B-N)X+2CY\equiv 0 \pmod{2mm'},$$
$$(13)\quad 2aa'X+(B+N)Y\equiv 0 \pmod{2mm'}.$$

(11) résulte immédiatement de (7), (8). Pour établir les deux

autres, observons que l'égalité

$$(t+u\sqrt{D})(t'+u'\sqrt{D}) = (t''+u''\sqrt{D})(t'''+u'''\sqrt{D}),$$

où t, u, t', u', t'', u'', t''', u''' sont entiers, entraîne l'équation identique en z

$$(t+uz)(t'+u'z) = (t''+u''z)(t'''+u'''z) + (uu'-u''u''')(z^2-D),$$

d'où, puisque $N^2 \equiv D \pmod{4mm'}$,

$$(t+uN)(t'+u'N) \equiv (t''+u''N)(t'''+u'''N) \pmod{4mm'}.$$

De là résulte, d'après (6),

$$[2ax+(B+N)y][2a'x'+(B+N)y'] \equiv 4aa'X+2(B+N)Y \pmod{4mm'}$$

et, d'après (9), (10),

$$0 \equiv 4aa'X + 2(B+N)Y \pmod{4mm'},$$
$$2aa'X + (B+N)Y \equiv 0 \pmod{2mm'}.$$

Ensuite (6), multipliée par $B-\sqrt{D}$ et divisée par $2a$ et par $2a'$, donne respectivement

$$[(B-\sqrt{D})x+2a'Cy][2a'x'+(B+\sqrt{D})y'] = 2a'[(B-\sqrt{D})X+2CY],$$
$$[2ax+(B+\sqrt{D})y][(B-\sqrt{D})x'+2aCy'] = 2a[(B-\sqrt{D})X+2CY].$$

Multipliant la première par $B-\sqrt{D}$, la seconde par $B+\sqrt{D}$, puis divisant la première par $2a'$, la seconde par $2a$, on obtient

$$[(B-\sqrt{D})x+2a'Cy][(B-\sqrt{D})x'+2aCy']$$
$$= (B-\sqrt{D})[(B-\sqrt{D})X+2CY],$$
$$C[2ax+(B+\sqrt{D})y][2a'x'+(B+\sqrt{D})y']$$
$$= (B+\sqrt{D})[(B-\sqrt{D})X+2CY].$$

Les quatre formules précédentes donnent, si l'on y remplace $\sqrt{D}$ par N, des congruences $\pmod{4mm'}$ qui deviennent, d'après (9), (10),

$$2a'[(B-N)X+2CY] \equiv 0 \pmod{4mm'},$$
$$2a[(B-N)X+2CY] \equiv 0 \pmod{4mm'},$$
$$(B-N)[(B-N)X+2CY] \equiv 0 \pmod{4mm'},$$
$$(B+N)[(B-N)X+2CY] \equiv 0 \pmod{4mm'}.$$

Remplaçant les deux dernières par leur somme et divisant par 2, on obtient les congruences

$$a[(B - N)X + 2CY] \equiv 0 \pmod{2mm'},$$
$$a'[(B - N)X + 2CY] \equiv 0 \pmod{2mm'},$$
$$B[(B - N)X + 2CY] \equiv 0 \pmod{2mm'},$$

qui entraînent

$$(B - N)X + 2CY \equiv 0 \pmod{2mm'},$$

sans quoi a, a', B auraient un diviseur commun contre l'hypothèse.

Si (a, b, c), (a', b', c') sont des formes accordées de diviseurs σ, σ' premiers entre eux, leur composée (aa', B, C) aura le diviseur $\sigma\sigma'$.

Cela résulte de ce que $(a, B, a'C)$, (a', B, aC), équivalentes aux proposées, ont les diviseurs respectifs σ, σ' et que a, a', B sont premiers entre eux. En effet, B divisible par σ, σ' l'est par $\sigma\sigma'$, aa' aussi; de plus, σ divisant a, B, $a'C$ divise $a'C$, donc C, et on voit de même que σ' divise C. Enfin $\sigma\sigma'$ est le plus grand commun diviseur de aa', B, C, car si $p\sigma\sigma'$ divisait ces trois nombres, p étant premier, il faudrait que $\frac{a}{\sigma}$ ou $\frac{a'}{\sigma'}$, soit $\frac{a}{\sigma}$, fût divisible par p et $p\sigma$ diviserait a, B, $a'C$ contre l'hypothèse.

K, K' étant deux classes de discriminant D et de diviseurs σ, σ' premiers entre eux, on peut toujours choisir dans K, K' respectivement deux formes (a, b, c), (a', b', c') accordées.

En effet, on peut toujours trouver un représentant (a, b, c) de K où $\frac{a}{\sigma}$ soit premier à un nombre quelconque, ici à σ', puis un représentant (a', b', c') de K', tel que a' soit premier à a. Alors (a, b, c), (a', b', c') seront forcément accordées. Nous dirons aussi que les classes K, K' sont accordées.

La classe L de diviseur $\sigma\sigma'$ à laquelle appartiennent toujours les composées de deux formes accordées prises dans K, K' est dite *composée* de K, K' et l'on écrit

$$L = KK' = K'K.$$

Si l'on compose successivement plusieurs classes de même dis-

criminant D, on peut intervertir l'ordre de composition sans altérer le résultat. On l'a vu pour deux classes; il suffit de le montrer pour trois K, K', K'' de diviseurs σ, σ', σ'' premiers entre eux deux à deux. Prenons les représentants (a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c'') de ces trois classes de manière que a soit premier à $\sigma'\sigma''$, puis a' premier à a comme tout à l'heure, puis a'' à aa'. a, a', a'' étant premiers entre eux deux à deux, les classes seront accordées deux à deux.

Déterminons alors B par les congruences simultanées

$$(14)\quad B \equiv b \pmod{2a}, \qquad B \equiv b' \pmod{2a'}, \qquad B \equiv b'' \pmod{2a''}.$$

Elles sont possibles; en effet, B_0 étant une solution de la première et ayant, par suite, la parité de b, b', b'', D, il suffit de déterminer $\lambda \pmod{a'}$ par la congruence

$$B_0 + 2a\lambda \equiv b' \pmod{2a'},$$

toujours possible, puis, λ_0 étant une solution, μ par la nouvelle congruence également possible

$$B_0 + 2a(\lambda_0 + \mu a') \equiv b'' \pmod{a''}.$$

Les congruences (14) élevées au carré donnent ensuite

$$B^2 \equiv b^2 \pmod{4a} \equiv b'^2 \pmod{4a'} \equiv b''^2 \pmod{4a''},$$

et, puisque

$$D \equiv b^2 \pmod{4a} \equiv b'^2 \pmod{4a'} \equiv b''^2 \pmod{4a''},$$

$$B^2 \equiv D \pmod{4aa'a''},$$

$$D = B^2 - 4aa'a''C \qquad (C \text{ entier}).$$

Donc la classe K contient la forme $(a, B, a'a''C)$,
» K' » $(a', B, a''aC)$,
» K'' » $(a'', B, aa'C)$,
» K'K'' » $(a'a'', B, aC)$,
» K''K » $(a''a, B, a'C)$,
» KK' » $(aa', B, a''C)$.

Donc chacune des classes (KK')K'', (K'K'')K, (K''K)K' contient la même forme $(aa'a'', B, C)$; elles sont donc identiques.

Parcourons maintenant quelques cas importants de la composi-

tions des formes. La forme principale

$$\left(1, \lambda, \frac{\lambda^2 - D}{4}\right), \quad [\lambda = 0, \text{ si } D \equiv 0 (\text{mod} 4); \quad \lambda = 1, \text{ si } D \equiv 1 (\text{mod} 4)]$$

est évidemment accordée avec une forme quelconque (a, b, c), et le résultat de la composition est la même forme (a, b, c). On représentera donc la classe principale par 1, quand il s'agit de composition de classes.

Si (a, b, c) est *primitive*, elle est accordée avec (c, b, a) et leur composition donne $(ac, b, 1)$ équivalente à $(1, -b, ac)$ (§ 6), laquelle est parallèle, donc équivalente, à la forme principale. Or (c, b, a) équivaut à $(a, -b, c)$. Donc la composition de deux classes *primitives* opposées donne la classe principale. On représentera donc par H^{-1} la classe primitive opposée de H, et l'on écrira $HH^{-1} = 1$. Une remarque importante est que, si H *est primitive,* on peut de

$$HK = HL, \tag{15}$$

K, L étant deux classes quelconques, conclure

$$K = L,$$

comme on le voit en composant les deux membres de (17) avec la classe opposée de H.

Soient K, K_1 deux classes quelconques de même diviseur σ; on peut toujours trouver H primitive telle que $K_1 H = K$.

Démontrons-le d'abord pour le cas où $K_1 = S$, S étant la forme la plus simple (la *forma simplicissima* de Gauss, forme qui joue, dans l'ordre σ, le rôle de la forme principale dans l'ordre primitif) de l'ordre σ

$$S = \left(\sigma, \lambda\sigma, \frac{\lambda^2\sigma^2 - D}{4\sigma}\right), \quad [\lambda = 0, \text{ si } D \equiv 0 (\text{mod} 4); \ \lambda = 1, \text{ si } D \equiv 1 (\text{mod} 4)].$$

On peut (§ 9) trouver un représentant $(a\sigma, b, c)$ de K tel que a soit premier à σ. Or

$$(a\sigma, b, c) = (a, b, c\sigma)(\sigma, b, ac) \backsim (a, b, c\sigma)\left(\sigma, \lambda\sigma, \frac{\lambda^2\sigma^2 - D}{4\sigma}\right);$$

donc

$$K = (a, b, c\sigma) S.$$

Ainsi on pourra trouver H_1, H_2 telles que

$$SH_1 = K, \qquad SH_2 = K_1,$$

d'où

$$K_1 H_2^{-1} H_1 = K,$$

et en posant $H_2^{-1} H_1 = H$

$$K_1 H = K.$$

Remarquons que les formes les plus simples de diviseurs σ, σ' premiers entre eux donneront par composition la forme la plus simple de diviseur $\sigma\sigma'$, car on a évidemment

$$\left(\sigma, \lambda\sigma, \frac{\lambda^2\sigma^2 - D}{4\sigma}\right)\left(\sigma', \lambda\sigma, \frac{\lambda^2\sigma^2 - D}{4\sigma'}\right) = \left(\sigma\sigma', \lambda\sigma\sigma', \frac{\lambda^2\sigma^2\sigma'^2 - D}{4\sigma\sigma'}\right).$$

Je signalerai enfin une conséquence immédiate de ces dernières propositions. Une classe F composée de deux autres classes f, f' pouvant représenter respectivement deux nombres d, d' pourra représenter leur produit dd' (¹). Car soient (a, b, c), (a', b', c') deux formes accordées représentant les classes f, f' et (aa', B, C) la forme composée. On aura

$$(a, b, c) \backsim (a, B, a'C),$$
$$(a', b', c') \backsim (a', B, aC).$$

Prenons alors x, y; x', y' tels que

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d,$$
$$a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2 = d'$$

et X, Y tels que

$$X = xx' - Cyy', \qquad Y = \tfrac{1}{2}[(2ax + By)y' + (2a'x' + B'y')y].$$

On aura, d'après un théorème démontré au début,

$$(ax^2 + Bxy + a'Cy^2)(a'x'^2 + Bx'y' + aCy'^2) = aa'X' + BXY + CY^2 = dd'.$$

Cherchons à établir la proposition réciproque. Soit n un nombre représentable par une classe primitive. On pourra trouver dans cette classe une forme du type (n, b, c). Soit $dd_1 = n$ une décomposition de n telle que d, d_1, Q soient premiers entre eux.

(¹) Il ne s'agit dans ce qui suit que de classes primitives.

Alors d, d_1, b seront certainement premiers entre eux, car la relation

$$b^2 - 4cdd_1 = D_0 Q^2,$$

montre que, s'ils avaient un diviseur commun θ, θ diviserait Q puisque le quotient de $b^2 - 4cdd_1$ par θ aurait encore la forme de discriminant. Les deux formes (d, b, cd_1), (d_1, b, cd) sont donc accordées et l'on a

$$(d, b, cd_1)(d_1 b, cd) = (n, b, c).$$

Si $n = dd_1 d_2$ et que d, $d_1 d_2$, Q soient premiers entre eux, on aura de même

$$(d, b, cd_1 d_2)(d_1 d_2, b, cd) = (n, b, c),$$

et, si d_1, d_2, Q sont encore premiers entre eux,

$$(d, b, cd_1 d_2)(d_1, b, cd_2 d)(d_2, b, cdd_1) = (n, b, c).$$

En général, si $n = d_1 d_2 \ldots d_k$ et qu'aucun diviseur commun à d_i et à Q ne divise d_j, pour $j \neq i$, on aura

$$\prod_{i=1}^{i=k} \left(d_i, b, \frac{cn}{d_i}\right) = (n, b, c).$$

Désignons d'une manière générale par K_x une classe pouvant représenter le nombre x. Si d_1, d_2, ..., d_k satisfont toujours aux mêmes conditions, en particulier s'ils sont premiers entre eux deux à deux, ou s'ils sont tous premiers à Q, les classes $K_{d_1 d_2 \ldots d_k}$ seront les classes distinctes obtenues en composant les classes K_{d_1}, les classes K_{d_2}, ..., les classes K_{d_k} k à k, sans prendre ensemble des classes de même indice.

La seule classe K_1 pouvant représenter 1 est la principale, car une telle classe contient une forme du type $(1, b, c)$ et deux formes $(1, b, c)$, $(1, b', c')$ sont toujours parallèles, donc équivalentes.

Les classes pouvant représenter les diviseurs de $N = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \ldots \sigma_k$ (les σ étant premiers et, si N n'est pas premier à Q, distincts) sont les classes distinctes obtenues en composant les classes K_1,

$K_{\sigma_1}, K_{\sigma_2}, \ldots, K_{\sigma_k}$ deux à deux, trois à trois, etc., k à k sans jamais prendre ensemble deux classes K_{σ_i} où i ait la même valeur. Autrement dit, si $K_{\sigma_i}^{(1)}, K_{\sigma_i}^{(2)}, \ldots$ sont les classes pouvant représenter σ_i, on composera k à k les classes

$$\begin{array}{ccccc} K_1, & K_{\sigma_1}^{(1)}, & K_{\sigma_1}^{(1)}, & K_{\sigma_1}^{(3)}, & \ldots, \\ K_1, & K_{\sigma_2}^{(1)}, & K_{\sigma_2}^{(2)}, & K_{\sigma_2}^{(3)}, & \ldots, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_1, & K_{\sigma_k}^{(1)}, & K_{\sigma_k}^{(2)}, & K_{\sigma_k}^{(3)}, & \ldots, \end{array}$$

en prenant toujours une classe de chaque ligne. C'est un procédé analogue à celui employé pour former tous les diviseurs d'un nombre. Mais ici on ne prendra que les classes *distinctes* fournies par cette composition.

§ 13. Groupes de classes. Rapport du nombre des classes primitives au nombre des classes d'ordre σ.

Je rappellerai d'abord quelques notions sur les groupes finis ([1]). Un système $\mathcal{G}$ d'éléments de n'importe quelle espèce A_1, A_2, A_3, ... se nomme *groupe* quand il satisfait aux conditions suivantes :

1° De deux éléments quelconques, par un procédé défini quelconque que nous nommerons *composition* ou *multiplication*, on déduit toujours un nouvel élément *du même système*, ce qui s'écrira

$$A_i A_k = A_h.$$

2° On a toujours

$$(A_i A_k) A_h = A_i (A_k A_h) = A_i A_k A_h.$$

C'est ce qu'on exprime en disant que le procédé doit être *associatif*, sans qu'il soit nécessairement *commutatif*. Quand il est commutatif, c'est-à-dire quand, en outre, on a toujours

$$A_i A_k = A_k A_i,$$

le groupe est dit *abélien*.

([1]) H. WEBER, *Elliptische Functionen und algebraische Zahlen*, § 53.

3° De $AA_i = AA_k$, comme de $A_i A = A_k A$, on peut conclure $A_i = A_k$.

Si le système se compose d'un nombre infini d'éléments, le groupe est dit *infini*. C'est ce qui a lieu pour l'ensemble des nombres relativement à la multiplication. Nous ne nous occuperons ici que des groupes finis.

Dans chaque groupe fini

$$\mathcal{G} = A_1, A_2, \ldots, A_n,$$

il y a toujours un élément A^0 et un seul tel que l'on ait, quel que soit i,

$$A_i A^0 = A_i.$$

Car soit A_i un élément quelconque ; les éléments

$$A_i A_1, A_i A_2, \ldots, A_i A_n$$

sont tous différents, d'après la troisième condition, et reproduisent par suite $\mathcal{G}$; donc A_i s'y trouve, soit

$$(1) \qquad A_i = A_i A^0,$$

et la troisième propriété des groupes montre encore que l'élément A^0 est unique. On voit de même qu'il y a un élément A_0 et un seul pour lequel

$$(2) \qquad A_i = A_0 A_i.$$

Si dans (1), (2) on fait respectivement $A_i = A_0$, $A_i = A^0$, il vient

$$A_0 A^0 = A_0 = A^0.$$

A chaque élément A on en peut adjoindre un autre A^{-1} tel que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = A^0;$$

car $A_i A$ et AA_i parcourant tout le groupe en même temps que A_i, il y aura un élément A^{-1} tel que $AA^{-1} = A^0$, donc, d'après la proposition précédente,

$$A^{-1}AA^{-1} = A^{-1}A^0 = A^{-1} = A^0 A^{-1}$$

et, d'après la troisième propriété des groupes

$$A^{-1}A = A^0.$$

De là résulte la signification de A^m pour $m > o$ ou $m < o$: ce sont les résultats de la composition de A ou de A^{-1} avec lui-même.

Un groupe $\mathfrak{H}$ dont les éléments $B_1, B_2, \ldots, B_\nu$ appartiennent à $\mathfrak{G}$ s'appelle un *diviseur* de $\mathfrak{G}$ et $\frac{n}{\nu}$ est entier. Si $\nu = n$, c'est évident; si $\nu < n$, soit A un élément de $\mathfrak{G}$ étranger à $\mathfrak{H}$. Les éléments du complexe

$$\mathfrak{H}A = B_1A, \quad B_2A, \quad \ldots \quad B_\nu A$$

diffèrent entre eux et de ceux de $\mathfrak{H}$ d'après la troisième propriété des groupes. Si $\mathfrak{G}$ n'est pas épuisé, prenons-y A' étranger à $\mathfrak{H}$ et à $\mathfrak{H}A$ et formons le nouveau complexe

$$\mathfrak{H}A' = B_1A', \quad B_2A', \quad \ldots, \quad B_\nu A',$$

dont les éléments diffèrent entre eux, de ceux de $\mathfrak{H}$ et de ceux de $\mathfrak{H}A$, car de $B_iA' = B_jA$ on tirerait $A' = B_i^{-1}B_jA$ et A' appartiendrait à $\mathfrak{H}A$ contre l'hypothèse. En continuant ainsi, on décomposera $\mathfrak{G}$ en un certain nombre p de complexes, contenant chacun ν éléments. Donc $n = \nu p$; p est l'*indice* de $\mathfrak{H}$.

$\mathfrak{H}A$ n'est pas un groupe, car, de $B_iAB_kA = B_jA$, on tire successivement $B_iAB_k = B_j$, $AB_k = B_i^{-1}B_j$, $A = B_i^{-1}B_jB_k^{-1}$, et A appartiendrait à $\mathfrak{H}$ contre l'hypothèse.

$A^{-1}\mathfrak{H}A$ forme évidemment un groupe. Les p groupes

$$A_0^{-1}\mathfrak{H}A_0 = \mathfrak{H}, \qquad A^{-1}\mathfrak{H}A, \quad A'^{-1}\mathfrak{H}A', \quad \ldots$$

sont des *diviseurs conjugués* de $\mathfrak{G}$. Ils ne sont pas nécessairement tous distincts. S'ils sont tous identiques, $\mathfrak{H}$ est un *diviseur propre*.

On voit que les K(D) classes primitives de discriminant D, relativement à la *composition* définie précédemment, forment un groupe abélien, en particulier que les puissances

$$H^0 = 1, \quad H, \quad H^2, \quad \ldots, \quad H^{\nu-1}, \quad H^\nu = 1$$

d'une classe H forment un diviseur de ce groupe et que $H^{\nu-1} = H^{-1}$ est la classe opposée à H. Ce diviseur se nomme *groupe régulier* ou *période de la classe* H.

K, K_1 étant deux classes quelconques de discriminant D et de

diviseur σ, on a vu qu'il y a toujours au moins une classe primitive H telle que $K_1 H = K$. Quand K parcourt les $K\left(\frac{D}{\sigma^2}\right)$ classes d'ordre σ, H parcourt, en tout ou en partie, les K(D) classes primitives; donc, quand H parcourt les K(D) classes primitives, K parcourt nécessairement, au moins une fois, les $K\left(\frac{D}{\sigma^2}\right)$ classes d'ordre σ.

Soient $R_i (i = 1, 2, \ldots, r)$ les classes primitives telles que $R_i K_1 = K_1$. Ces classes forment évidemment un groupe $\mathfrak{R}$ d'ordre r et ce groupe est indépendant du choix de K_1; car, si K_2 remplace K_1, on peut trouver H telle que $K_1 H = K_2$. Or on a $\mathfrak{R} K_1 = K_1$, donc $\mathfrak{R} K_1 H = K_1 H$ ou $\mathfrak{R} K_2 = K_2$.

Les K(D) classes primitives se répartissent alors d'après un procédé déjà indiqué en $\frac{K(D)}{r}$ complexes

$$\mathfrak{R} H_1, \ \mathfrak{R} H_2, \ \ldots, \ \mathfrak{R} H_{\frac{K(D)}{r}} \quad (H_1 = 1),$$

de r formes chacun. Si, dans $K_1 H$, H parcourt les r formes d'un même complexe $\mathfrak{R} H_k$, on aura toujours la même forme $K_1 H_k$ d'ordre σ, et deux classes primitives H_k, H'_k pour lesquelles $K_1 H_k = K_1 H'_k$ appartiennent au même complexe, car de $K_1 H_k = K_1 H'_k$ on déduit $K_1 H'_k H_k^{-1} = K_1$, et, $H'_k H_k^{-1}$ étant alors une classe de $\mathfrak{R}$ soit R, on a $H'_k = R H_k$.

Donc, si H parcourt les K(D) formes primitives, $K_1 H$ parcourra $r = \frac{K(D)}{K\left(\frac{D}{\sigma^2}\right)}$ fois le système des $K\left(\frac{D}{\sigma^2}\right)$ classes d'ordre σ.

Ce qui précède s'applique évidemment encore, si dans le cas $D < 0$, on se borne à la considération des seules formes positives.

Pour déterminer le groupe $\mathfrak{R}$ nous remarquerons avec Gauss ([1]) que ses classes sont caractérisées par la propriété de pouvoir représenter (proprement ou improprement) le carré du diviseur σ^2. D'abord toute classe de $\mathfrak{R}$ peut représenter σ^2. Prenons, en effet, dans chaque classe primitive H (§ 9) un représentant $(a, B, C\sigma)$

([1]) GAUSS, *Disq.*, art. 253.

où a soit premier à σ et $B \equiv C \equiv 0 \pmod{\sigma}$ (¹). Si alors H appartient à $\mathfrak{K}$, on aura, d'après la définition de $\mathfrak{K}$,

$$(a, B, C\sigma)(\sigma, B, aC) = (a\sigma, B, C) \backsim (\sigma, B, aC).$$

On pourra donc trouver deux entiers x, y tels que

$$a\sigma x^2 + Bxy + Cy^2 = \sigma,$$
$$a(\sigma x)^2 + B(\sigma x)y + C\sigma y^2 = \sigma^2,$$

donc σ^2 est représentable par $(a, B, C\sigma)$ de la classe H.

Réciproquement, si σ^2 est représentable par les formes de H, donc par $(a, B, C\sigma)$, on peut trouver x', y tels que

$$ax'^2 + Bx'y + C\sigma y^2 = \sigma^2,$$

et, par suite, $x'(ax' + By) \equiv 0 \pmod{\sigma}$. Or, si un seul facteur de σ manquait à x', il manquerait également à $ax' + By$, où $B \equiv 0 \pmod{\sigma}$ et où a est premier à σ; donc $x' \equiv 0 \pmod{\sigma} = \sigma x$ et l'on a

$$a\sigma x^2 + Bxy + Cy^2 = \sigma,$$

x, y étant premiers entre eux, sans quoi le premier membre serait divisible par un multiple de σ autre que σ. Donc σ est proprement représentable par $(a\sigma, B, C)$, et, par conséquent (§ 10), cette forme équivaut à une forme de premier coefficient σ, laquelle $\Big($puisque le second coefficient b y est divisible par σ et que $\frac{b}{\sigma}$ a la parité de $\frac{D}{\sigma^2}\Big)$ sera parallèle à la forme la plus simple de diviseur σ

$$S = \left(\sigma, \lambda, \sigma\frac{\lambda^2\sigma^2 - D}{4\sigma}\right) \qquad [\lambda \equiv D \pmod{4}; \quad 0 \leq \lambda \leq 1].$$

Comme d'ailleurs $(a\sigma, B, C)$ appartient à SH, on a $SH = S$, donc H appartient à $\mathfrak{K}$.

(¹) Si le déterminant D admet l'ordre σ, c'est que $\frac{D}{\sigma^2}$ a la forme de discriminant et que, par suite, σ divise Q (§ 6). On peut aisément démontrer à nouveau le théorème invoqué ici au moyen de la composition des formes. Prenons dans H une forme (a, b, c) où a soit premier à σ et composons-la avec la forme la plus simple de diviseur $\sigma\left(\sigma, \lambda\sigma, \frac{\lambda^2\sigma^2 - D}{4\sigma}\right)$. Soit $(a\sigma, B, C)$ la composée de diviseur σ; $(a, B, C\sigma)$ et (σ, B, aC) sont respectivement parallèles aux deux composantes, et $(a, B, C\sigma)$ est la forme cherchée.

Voici l'emploi de la remarque de Gauss. Soit R une classe de $\mathfrak{K}$ et dans cette classe une forme qui représente σ^2 pour les valeurs α, γ des variables de plus grand commun diviseur δ; δ^2 divisera $\sigma^2 = \delta^2 \rho^2$, ρ^2 sera proprement représentable par R et l'on pourra choisir comme représentant de R une forme de premier coefficient ρ^2. Inversement toute forme de premier coefficient ρ^2 représentera σ^2 pour les valeurs δ, o des variables et, par conséquent, appartiendra à $\mathfrak{K}$ si elle est primitive.

Pour former r représentants des r classes de $\mathfrak{K}$, il suffira donc de trouver toutes les formes primitives non équivalentes dont le premier coefficient est un carré ρ^2 diviseur de σ^2, et, pour chaque ρ^2, il suffira évidemment de prendre les formes dont les seconds coefficients sont incongrus (mod $2\rho^2$).

Supposons σ premier et $D = D'\sigma^2$. Il n'y aura à considérer que les formes

$$(3)\qquad \left(1,\ \lambda,\ \frac{\lambda^2 - D}{4}\right) = E,\quad \left(\sigma^2,\ b\sigma,\ \frac{b^2\sigma^2 - D}{4\sigma^2}\right) = \left(\sigma^2,\ b\sigma,\ \frac{b^2 - D'}{4}\right) = F_b,$$

le second coefficient de F_b devant contenir σ puisque le premier coefficient et D sont $\equiv 0 \pmod{\sigma^2}$. On aura toutes les formes F_b possibles en faisant parcourir à $b\sigma$ toutes les valeurs acceptables (mod $2\sigma^2$), c'est-à-dire à b toutes les valeurs acceptables (mod 2σ). Donc, D' devant avoir la forme de discriminant et $b^2 - D' \equiv 0 \pmod 4$,

$$(4)\qquad \begin{cases} \text{si } D' \equiv 1 \pmod 4, & b = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ 2\sigma - 1, \\ \text{si } D' \equiv 0 \pmod 4, & b = 0,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ 2\sigma - 2. \end{cases}$$

Il faut d'abord excepter les valeurs de b vérifiant $\frac{b^2 - D'}{4} \equiv 0 \pmod\sigma$, pour lesquelles F_b ne serait pas primitive. Étudions donc la congruence

$$(5)\qquad b^2 \equiv D' \pmod{4\sigma}.$$

1° *Soit* $\sigma = 2$.

Si $\left(\frac{D'}{8}\right) = \left(\frac{D'}{\sigma}\right) = -1$, (5) est impossible et l'on pourra prendre

$$b = 1, 3.$$

Si $\left(\frac{D'}{8}\right) = \left(\frac{D'}{\sigma}\right) = +1$, (5) a quatre racines 1, 3, 5, 7, et, par conséquent, b ne pourra prendre aucune valeur.

Si $\left(\frac{D'}{8}\right) = \left(\frac{D'}{\sigma}\right) = 0$, (5) a la racine $b = 2$ si $D' \equiv 4 \pmod 8$ et la racine $b = 0$ si $D' \equiv 0 \pmod 8$. Donc b ne pourra prendre qu'une des deux valeurs $0, 2$.

Ainsi, l désignant le nombre des formes (3) acceptables, en y comprenant E, on aura

$$(6) \qquad \sigma = 2, \qquad l = \sigma - \left(\frac{D'}{\sigma}\right).$$

2° $\sigma \neq 2$ (*premier impair*).

Si $\left(\frac{D'}{\sigma}\right) = -1$, (5) est impossible et b peut prendre toutes les valeurs (4).

Si $\left(\frac{D'}{\sigma}\right) = +1$, (5) a quatre racines dont deux seulement sont différentes $(\text{mod } 2\sigma)$; deux valeurs b sont à rejeter dans (4).

Si $\left(\frac{D'}{\sigma}\right) = 0$, (5) a deux racines qui n'en représentent qu'une $(\text{mod } 2\sigma)$; donc une valeur de b est à rejeter dans (4).

Ici encore on a

$$(7) \qquad \sigma \text{ premier impair}, \qquad l = \sigma - \left(\frac{D'}{\sigma}\right).$$

Il faut maintenant examiner le cas où deux des formes (3) seraient équivalentes. C'est à quoi serviront les propositions suivantes.

La condition nécessaire et suffisante pour que $F_\beta \backsim E$ *est qu'on puisse trouver deux entiers* t, u *satisfaisant simultanément à*

$$t^2 - D'u^2 = 4, \qquad t + \beta u \equiv 0 \pmod{2\sigma}.$$

1° $D \equiv 0 \pmod 4$, donc $\lambda = 0$.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que $F_\beta \backsim E$ sont (§ 10) qu'on puisse trouver deux entiers x, y tels que

$$(8) \qquad x^2 - \frac{D}{4}y^2 = \sigma^2,$$

$$(9) \qquad 2x + \beta\sigma y \equiv 0 \pmod{2\sigma^2},$$

$$(10) \qquad -\beta\sigma x - 2\frac{D}{4}y \equiv 0 \pmod{2\sigma^2},$$

la dernière devient, par élimination de x avec la précédente,

$$(\beta^2\sigma^2 - D)y \equiv 0 \pmod{4\sigma^2}.$$

ou

$$(\beta^2 - D')y \equiv 0 \qquad (\text{mod } 4),$$

toujours vérifiée.

Donc les conditions nécessaires et suffisantes se réduisent à (8), (9).

Si $\sigma = 2$, ce sont celles de l'énoncé pour $x = t$, $y = u$.

Si $\sigma \neq 2$, (9) montre que $2x \equiv 0 \ (\text{mod } \sigma) = \sigma t$ et, si l'on pose $\sigma y = u$, ces conditions deviennent encore celles de l'énoncé.

2° $D \equiv 1 \ (\text{mod } 4)$, donc $\lambda = 1$, $\beta \equiv 1 \ (\text{mod } 2)$, $\sigma \neq 2$.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on ait $F_\beta \backsim E$ sont

$$x^2 + xy + \frac{1 - D}{4} y^2 = \sigma^2,$$
$$2x + y(1 + \beta\sigma) \equiv 0 \qquad (\text{mod } 2\sigma^2),$$
$$x(1 - \beta\sigma) + 2y\frac{1 - D}{4} \equiv 0 \qquad (\text{mod } 2\sigma^2),$$

ou

$$(2x + y)^2 - Dy^2 = 4\sigma^2,$$
$$2x + y + \beta\sigma y \equiv 0 \qquad (\text{mod } 2\sigma^2),$$
$$2(2x + y) - 4\beta\sigma x - 2Dy \equiv 0 \qquad (\text{mod } 8\sigma^2).$$

Posant, d'après la première,

(11) $$2x + y = t\sigma$$

et éliminant x, on obtient les nouvelles conditions

(12) $$t^2 - D'y^2 = 4,$$

(13) $$t + \beta y \equiv 0 \ (\text{mod } 2\sigma) = 2m\sigma,$$

(14) $$\sigma(t + \beta y) - \beta\sigma^2 t - Dy \equiv 0 \qquad (\text{mod } 4\sigma^2),$$

équivalentes aux précédentes, car t, y étant, d'après (12), de même parité permettent de déterminer x par (11). Or (14) résulte des deux précédentes, car l'élimination de t entre (13), (14) conduit à

$$2m(1 - \beta\sigma) + y(\beta^2 - D') \equiv 0 \qquad (\text{mod } 4),$$

qui est identique, β et σ étant impairs. Donc les conditions nécessaires et suffisantes se réduisent encore à celles de l'énoncé.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on ait $F_b \backsim F_{b'}$ sont qu'il existe deux entiers t, u tels que

$$t^2 - D'u^2 = 4,$$
$$(b - b')t + (bb' - D')u \equiv 0 \qquad (\text{mod } 4\sigma).$$

En effet, ces conditions nécessaires et suffisantes sont qu'il existe deux entiers x, y tels que

$$\sigma^2 x^2 + b\sigma xy + \frac{b^2 - D'}{4} y^2 = \sigma^2,$$

$$(b - b')\sigma x + \frac{b^2 - D'}{2} y \equiv 0 \pmod{2\sigma^2},$$

$$2\sigma^2 x + (b + b')\sigma y \equiv 0 \pmod{2\sigma^2}.$$

Comme par hypothèse $\frac{b^2 - D'}{4}$ est $\not\equiv 0 \pmod{\sigma}$, il faut que $y \equiv 0 \pmod{\sigma}$, et la troisième condition s'évanouit, puisque $b \equiv b' \pmod{2}$. Les deux premières s'écrivent

$$(2\sigma x + by)^2 - D'y^2 = 4\sigma^2,$$

$$2(b - b')\sigma x + (b^2 - D')y \equiv 0 \pmod{4\sigma^2},$$

ou, si l'on pose $y = \sigma u$, $2x + bu = t$,

(15) $$t^2 - D'u^2 = 4,$$

(16) $$(b - b')(t - bu) + (b^2 - D')u \equiv 0 \pmod{4\sigma}.$$

Ces dernières sont bien équivalentes aux précédentes; car, si D est impair [et, par conséquent, b, puisque $b^2 - D' \equiv 0 \pmod{4}$], t et u seront de même parité, et, si D' est pair (donc aussi b), t sera pair; dans les deux cas $t - bu$ est pair et permet de déterminer x par $2x + bu = t$.

On peut écrire (15) et (16) sous la forme

$$t^2 - D'u^2 = 4,$$

$$\frac{b - b'}{2} t + \frac{bb' - D}{2} u \equiv 0 \pmod{2\sigma},$$

qui est celle de l'énoncé, ou encore sous la suivante :

$$t^2 - D'u^2 = 4,$$

$$\frac{b - b'}{2} \frac{t - bu}{2} + \frac{b^2 - D'}{4} u \equiv 0 \pmod{\sigma}.$$

Voici enfin le théorème qui achève cette théorie et permet de déterminer r.

Si μ est le nombre des formes (3) *appartenant à la classe principale, on a* $l = r\mu$.

1° $\sigma = 2$.

Ou bien b n'a qu'une détermination acceptable ($l = 2$), et alors ou bien $F_b \backsim E (\mu = 2, r = 1)$, ou bien non ($\mu = 1, r = 2$), et dans les deux cas le théorème est démontré.

Ou bien b a deux déterminations acceptables $\left[\left(\frac{D'}{2}\right) = -1\right]$, et ces deux déterminations sont 1, 3. Alors, s'il y a une solution (t, u) de $t^2 - D'u^2 = 4$ satisfaisant à $t + \beta u \equiv 0 \pmod 4$, c'est-à-dire ici à $t \pm u = 0 \pmod 4$, puisque $\beta = 1, 3$ ou $\equiv +1, -1 \pmod 4$, il y en a une (t, $-u$) satisfaisant à $t \mp u \equiv 0 \pmod 4$, et les *deux* F_b équivalent à E; donc $r = 1$, $\mu = 3$, ce qui démontre le théorème. S'il n'y a pas de solution de $t^2 - D'u^2 = 4$ satisfaisant à $t + \beta u \equiv 0 \pmod 4$, il n'y en aura pas non plus satisfaisant à

$$(b - b')t + (bb' - D')u \equiv 0 \pmod{4\sigma},$$

car cette congruence devient ici, en faisant $b = 3$, $b' = 1$, $-D' = 4k - 1$ et en divisant par 2,

$$t + (2k + 1)u \equiv 0 \pmod 4,$$

ou, selon la parité de k,

$$t \pm u \equiv 0 \pmod 4;$$

or c'est là précisément la congruence $t + \beta u \equiv 0 \pmod 4$ à laquelle nous supposons ne satisfaire aucune solution de $t^2 - D'u^2 = 4$.

2° σ *premier impair*.

Si $F_\beta \backsim E$, il y a une solution (t, u) de $t^2 - D'u^2 = 4$ satisfaisant à $t + \beta u \equiv 0 \pmod{2\sigma}$; donc $u \not\equiv 0 \pmod\sigma$, sans quoi, d'après $t + \beta u \equiv 0 \pmod{2\sigma}$, on aurait aussi $t \equiv 0 \pmod\sigma$, contrairement à $t^2 - D'u^2 = 4$.

Réciproquement, si (t, u) est solution de $t^2 - D'u^2 = 4$ et $u \not\equiv 0 \pmod\sigma$, on peut toujours trouver β satisfaisant à

(17) $$t + \beta u \equiv 0 \pmod{2\sigma},$$

(18) $$\beta^2 - D' \equiv 0 \pmod 4, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \beta = D' \pmod 2,$$

(19) $$\frac{\beta^2 - D'}{4} \not\equiv 0 \pmod\sigma.$$

Remarquons d'abord que (19) résulte de (17), (18), car de

$\beta^2 - D' = 4m\sigma$ on déduirait $D' = \beta^2 - 4m\sigma$ et

$$4 = t^2 - D'u^2 = t^2 - \beta^2 u^2 + 4m\sigma u^2,$$
$$t^2 - \beta^2 u^2 = -4(m\sigma u^2 - 1);$$

donc $t + \beta u$ serait premier à σ contrairement à (19).

Il reste à prouver qu'on peut trouver β vérifiant (17), (18).

Si D' est impair, t, u sont de même parité; s'ils sont pairs, (17) détermine $\beta (\bmod \sigma)$, et, par l'addition éventuelle de σ, on pourra toujours donner à β la parité de D'; s'ils sont impairs, β sera forcément impair comme D'.

Si D' est pair, t est toujours pair; donc, que u soit pair ou impair, on peut toujours résoudre (17). Si u est impair, β sera forcément pair, et, si u est pair, β déterminé $(\bmod \sigma)$ peut être rendu pair comme précédemment.

β étant déterminé de manière à satisfaire (17), (18), (19), F_β sera une des formes (3) et sera équivalente à E.

Soit μ le nombre des formes (3) appartenant ainsi à la classe principale; $\mu - 1$ sera le nombre des classes de nombres $\beta (\bmod 2\sigma)$, qui se tirent de $t + \beta u \equiv 0 (\bmod 2\sigma)$ pour les diverses solutions (t, u) de $t^2 - D'u^2 = 4$. Si, cherchant tous les β au moyen de ces deux relations, on épuise toutes les formes (3), on aura $l = \mu$, $r = 1$, et le théorème sera vérifié.

Si, au contraire, après cette opération, il reste dans (3) des formes étrangères à la classe principale, soit $F_{b'}$ une de ces formes, b' n'appartenant à aucune des $\mu - 1$ classes de nombres $\beta (\bmod 2\sigma)$ et donnant lieu à

$$b'^2 \equiv D' \pmod 4, \qquad \frac{b'^2 - D'}{4} \not\equiv 0 \pmod \sigma.$$

Il s'agit de prouver que parmi les l formes de (3) il y en a $\mu - 1$ différentes F_b qui sont équivalentes à $F_{b'}$ et $\neq F_{b'}$. Pour cela je montrerai qu'à chaque b donnant une forme $F_b \backsim F_{b'}$ et $\neq F_{b'}$ répond une seule des $\mu - 1$ valeurs β de tout à l'heure et inversement.

Si l'on a $F_b \backsim F_{b'}$ et $F_b \neq F_{b'}$, il y a une solution (t, u) de

$$(20) \qquad t^2 - D'u^2 = 4,$$

vérifiant

$$(21)\quad \begin{cases} \dfrac{b-b'}{2}\dfrac{t-bu}{2}+\dfrac{b^2-D'}{4}u\equiv 0 \pmod{\sigma} \\ \text{ou} \\ \dfrac{b-b'}{2}t+\dfrac{bb'-D}{2}u\equiv 0 \pmod{2\sigma}. \end{cases}$$

Si u était $\equiv 0 \pmod{\sigma}$, il faudrait $t\equiv 0 \pmod{\sigma}$ car $\dfrac{b-b'}{2}$ est premier à σ [sans quoi $b\equiv b' \pmod{2\sigma}$ et $F_b = F_{b'}$]; or, cela contredit (20); donc on a $u \not\equiv 0 \pmod{\sigma}$ et l'on peut, comme précédemment, trouver β satisfaisant à

$$(22)\quad \begin{cases} t+\beta u\equiv 0 \pmod{2\sigma}, \\ \beta^2 - D'\equiv 0 \pmod{4}, \quad \dfrac{\beta^2-D'}{4}\not\equiv 0 \pmod{\sigma}. \end{cases}$$

Donc à notre solution (t, u) vérifiant (21) répond une des $\mu - 1$ classes de β. Voyons comment cette classe est déterminée par b. En éliminant t entre (21) et (22), on obtient

$$u\left(\frac{b-b'}{2}\frac{b+\beta}{2}-\frac{b^2-D'}{4}\right)\equiv 0 \pmod{\sigma},$$

ou, u étant premier à σ,

$$(23)\quad \begin{cases} \dfrac{b-b'}{2}\dfrac{b+\beta}{2}-\dfrac{b^2-D'}{4}\equiv 0 \pmod{\sigma}, \\ \text{ou} \\ b\beta - b'(b+\beta)+D'\equiv 0 \pmod{4\sigma}. \end{cases}$$

$\dfrac{b-b'}{2}$ étant premier à σ, cette congruence détermine $\dfrac{b+\beta}{2} \pmod{\sigma}$, donc $b+\beta \pmod{2\sigma}$, donc $\beta \pmod{2\sigma}$ de la parité de b ou de D', et, comme elle ne détermine qu'une classe $(\bmod 2\sigma)$, c'est celle qui satisfait à (22). Donc à chaque forme $F_b \backsim F_{b'}$ et $\neq F_{b'}$ répond un et un seul des $\mu - 1$ nombres β.

Inversement, à chacun des $\mu - 1$ nombres β répond par (23) un seul nombre b donnant une forme F_b appartenant à (3) et équivalente à $F_{b'}$.

En effet, on a par hypothèse

$$\beta - b'\not\equiv 0 \pmod{2\sigma}, \qquad \frac{\beta - b'}{2}\not\equiv 0 \pmod{\sigma},$$

et par conséquent la congruence (23), qui s'écrit ainsi (elle est symétrique en b, β)

$$(24)\qquad \frac{\beta-b'}{2}\,\frac{\beta+b}{2}-\frac{\beta^2-D'}{4}\equiv 0 \pmod{\sigma},$$

est soluble en $\frac{\beta+b}{2}$, donc détermine $\beta+b \pmod{2\sigma}$, donc $b \pmod{2\sigma}$ de la parité de β ou de D'. De plus, $\frac{b^2-D'}{4}$ n'est pas divisible par σ, car si l'on avait

$$(25)\qquad \frac{b^2-D'}{4}\equiv 0 \pmod{\sigma},$$

il en résulterait, en retranchant (25) de (24),

$$\frac{\beta-b'}{2}\,\frac{\beta+b}{2}+\frac{b^2-\beta^2}{4}\equiv 0 \pmod{\sigma},$$

$$\frac{\beta+b}{2}\,\frac{b-b'}{2}\equiv 0 \pmod{\sigma}.$$

Donc un des nombres $\frac{\beta+b}{2}$, $\frac{b-b'}{2}$ serait $\equiv 0 \pmod{\sigma}$; donc

$$\begin{array}{llcll}
b\equiv-\beta & (\mathrm{mod}\,2\sigma) & \text{ou} & b\equiv b' & (\mathrm{mod}\,2\sigma),\\
b^2\equiv\beta^2 & (\mathrm{mod}\,4\sigma) & \text{ou} & b^2\equiv b'^2 & (\mathrm{mod}\,4\sigma),\\
b^2-D'\equiv\beta^2-D' & (\mathrm{mod}\,4\sigma) & \text{ou} & b^2-D'\equiv b'^2-D' & (\mathrm{mod}\,4\sigma),\\
0\equiv\beta^2-D' & (\mathrm{mod}\,4\sigma) & \text{ou} & 0\equiv b'^2-D' & (\mathrm{mod}\,4\sigma),
\end{array}$$

toutes deux impossibles par hypothèse.

Ainsi (24) fait correspondre à β un nombre b donnant une forme F_b; il reste à montrer que $F_b \backsim F_{b'}$. Or il existe une solution (t, u) de $t^2-D'u^2=4$ donnant

$$t+\beta u\equiv 0 \pmod{2\sigma}.$$

Éliminant β entre cette congruence et la congruence (23) multipliée par u, on obtient

$$\frac{b-b'}{2}\,\frac{t-bu}{2}+\frac{b^2-D'}{4}u\equiv 0 \pmod{\sigma},$$

qui avec $t^2-D'u^2=4$ caractérise l'équivalence de F_b, $F_{b'}$.

Donc parmi les l formes (3) il y en a toujours μ appartenant à

chacune des r classes de $\mathfrak{A}$. Donc

$$(26) \qquad l = r\mu, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Distinguons maintenant les deux cas $D' < 0$ et $D' > 0$.

Soit d'abord $D' < 0$. $t^2 - D'u^2 = 4$ a τ solutions et $E(D') = e^{\frac{2\pi i}{\tau}}$.

Si $D' < -4$, $\tau = 2$ et les seules solutions sont $t = \pm 1$, $u = 0$ non premier à σ; donc $\mu = 1$, $r = l$.

Si $D' = -4$, $\tau = 4$ et les seules solutions où u soit premier à σ sont $t = 0$, $u = \pm 1$; β est déterminé par $\pm\beta \equiv 0 \pmod{2\sigma}$, donc, D' étant pair, $\beta = 0$, $\mu = 2$, $r = \frac{l}{2}$.

Si $D' = -3$, $\tau = 6$ et les seules solutions où u soit premier à σ sont $t = \pm 1$, $u = \pm 1$; β est déterminé par $\beta \equiv \pm 1 \pmod{2\sigma}$, donc $\beta = 1$, $\beta = 2\sigma - 1$; $\mu = 3$, $r = \frac{l}{3}$.

On voit que $\mu = \frac{\tau}{2}$ dans tous les cas et, comme toujours $E(D) = e^{\pi i}$, on aura dans tous les cas

$$(27) \qquad K(D) = rK\left(\frac{D}{\sigma^2}\right), \qquad l = r\mu, \qquad \mu = \frac{\log E(D)}{\log E\left(\frac{D}{\sigma^2}\right)}.$$

Soit maintenant $D' > 0$. Nous arriverons aux mêmes résultats (27); mais la démonstration est moins simple.

Lemme. — *Si* (t', u'), (t'', u'') *sont deux solutions de*

$$(28) \qquad t^2 - D'u^2 = 4,$$

satisfaisant à

$$(29) \qquad t'u'' - u't'' \equiv 0 \pmod{2\sigma},$$

on aura

$$(30) \qquad \frac{t' + u'\sqrt{D'}}{2} = \frac{t_1 + u_1\sqrt{D}}{2}\,\frac{t'' + u''\sqrt{D'}}{2},$$

(t_1, u_1) *étant une solution de* $t^2 - Du^2 = 4$ *et réciproquement.*

En effet, on a

$$(t' + u'\sqrt{D'})(t'' - u''\sqrt{D'}) = t't'' - D'u'u'' + (u't'' - t'u'')\sqrt{D'}.$$

Or, $t't'' - D'u'u''$ est toujours pair, car, si D' est pair, t', t'' le sont et, si D' est impair, t' et u' sont de même parité comme aussi t'' et u''. Posons donc

$$t't'' - D'u'u'' = 2t_1, \qquad u't'' - t'u'' = 2u_1\sigma,$$

on aura

$$(31) \qquad \frac{t' + u'\sqrt{D'}}{2}\,\frac{t'' - u''\sqrt{D'}}{2} = \frac{t_1 + u_1\sigma\sqrt{D'}}{2}.$$

En multipliant les deux nombres de (31) par $\frac{t'' + u''\sqrt{D}}{2}$, on obtient (30).

Réciproquement, si (t_1, u_1) *est solution de* $t^2 - Du^2 = 4$ *et* (t'', u'') *de* (28), (30) *donnera une autre solution* (t', u') *de* (28) *vérifiant* (29). On voit d'abord comme précédemment, en remplaçant dans (30) $u_1\sqrt{D}$ par $u_1\sigma\sqrt{D'}$, que (t', u') est solution de (28), et, si l'on multiplie les deux membres de (30) par $\frac{t'' - u''\sqrt{D'}}{2}$, on obtient (31), donc

$$t't'' - D'u'u'' = 2t_1, \qquad u't'' - t'u'' = 2u_1\sigma \equiv 0 \pmod{2\sigma}.$$

On appelle *équivalentes* deux solutions (t', u'), (t'', u'') de (28) vérifiant (29).

Deux solutions (t'', u''), (t''', u''') *équivalentes à une troisième* (t', u') *sont équivalentes entre elles.* En effet, entre

$$(32) \qquad t'u'' - u't'' \equiv 0 \pmod{2\sigma},$$
$$(33) \qquad t'u''' - u't''' \equiv 0 \pmod{2\sigma},$$

éliminons successivement t', u'; il vient

$$(34) \qquad u'(t''u''' - u''t''') \equiv 0 \pmod{2\sigma},$$
$$(35) \qquad t'(t''u''' - u''t''') \equiv 0 \pmod{2\sigma}.$$

Si σ est premier impair, t' et u' ne pouvant être tous deux divisibles par σ à cause de la relation $t'^2 - D'u'^2 = 4$, (34) ou (35) donne

$$t''u''' - u''t''' \equiv 0 \pmod{\sigma},$$

d'où

$$t''u''' - u''t''' \equiv 0 \pmod{2\sigma},$$

puisque, quand D' est pair, t'' et t''' le sont, et que t'' et u'' comme t''' et u''' sont de même parité quand D' est impair.

Si $\sigma = 2$, il faut distinguer plusieurs cas.

Si l'un des deux nombres u', t' est impair, (34) ou (35) donne

$$(36) \qquad t'' u''' - u'' t''' \equiv 0 \pmod{4}.$$

Si t', u' sont tous deux pairs, ils ne sont certainement pas tous deux divisibles par 4, car $t'^2 - D' u'^2$ serait $\equiv 0 \pmod{16}$.

Soient $t' \equiv 0 \pmod{4}$, $u' \equiv 2 \pmod{4}$. Alors $D' \equiv 1 \pmod{4}$ à cause de $t'^2 - D' u'^2 = 4$. (32) et (33) donnent $t'' \equiv t''' \equiv 0 \pmod{2}$ et $t^2 - D' u^2 = 4$, $u'' \equiv u''' \equiv 0 \pmod{2}$, d'où (36).

Soient $t' \equiv 2 \pmod{4}$, $u' \equiv 0 \pmod{4}$. (32), (33) donnent $u'' \equiv u''' \equiv 0 \pmod{2}$ et $t^2 - D' u^2 = 4$ exige dans tous les cas $t'' \equiv t''' \equiv 0 \pmod{2}$, d'où (36).

Soient $t' \equiv 2 \pmod{4}$, $u' \equiv 2 \pmod{4}$. Alors $t'^2 \equiv u'^2 \equiv 4 \pmod{16}$ et $t'^2 - D' u'^2 = 4$ exige $D' \equiv 0 \pmod{4}$. Donc t'' et t''' sont pairs. D'ailleurs (32) et (33) montrent que t'' et u'' comme t''' et u''' sont de même parité. On a donc bien encore (36).

Nous rangerons dans une même classe toutes les solutions équivalentes de $t^2 - D' u^2 = 4$.

On voit d'abord que toutes les solutions dont les seconds nombres u sont $\equiv 0 \pmod{\sigma}$ appartiennent à la même classe, car de

$$t^{(i)} u^{(k)} - t^{(k)} u^{(i)} \equiv 0 \pmod{\sigma}$$

on conclut, comme tout à l'heure,

$$t^{(i)} u^{(k)} - t^{(k)} u^{(i)} \equiv 0 \pmod{2\sigma},$$

quand σ est impair; si $\sigma = 2$, il suffit de remarquer que, u étant pair, t le sera quel que soit D' et que, par conséquent,

$$u^{(i)} \equiv u^{(k)} \equiv 0 \pmod{2}$$

entraîne

$$t^{(i)} u^{(k)} - t^{(k)} u^{(i)} \equiv 0 \pmod{4}.$$

Considérons maintenant les solutions t, u où $u \not\equiv 0 \pmod{\sigma}$.

Deux d'entre ces solutions (t', u'), (t'', u'') sont équivalentes quand elles fournissent par les congruences

$$t' + \beta u' \equiv 0 \pmod{2\sigma},$$
$$t'' + \beta u'' \equiv 0 \pmod{2\sigma},$$

respectivement deux nombres $\beta = \beta'$, $\beta = \beta''$ *de la même classe* ($\bmod 2\sigma$) *et réciproquement.*

D'abord de

$$t' + \beta' u' \equiv 0 \pmod{2\sigma},$$
$$t'' + \beta'' u'' \equiv 0 \pmod{2\sigma},$$
$$\beta'' \equiv \beta' \pmod{2\sigma},$$

on déduit, en remplaçant β'' par β' dans la seconde et en éliminant β',

$$t' u'' - u' t'' \equiv 0 \pmod{2\sigma}.$$

Réciproquement de

$$t' + \beta' u' \equiv 0 \pmod{2\sigma}, \qquad u' \not\equiv 0 \pmod{\sigma},$$
$$t'' + \beta'' u'' \equiv 0 \pmod{2\sigma}, \qquad u'' \not\equiv 0 \pmod{\sigma},$$
$$t' u'' - u' t'' \equiv 0 \pmod{2\sigma},$$

résulte, par élimination de t', t'',

$$(\beta' - \beta'') u' u'' \equiv 0 \pmod{2\sigma},$$

et, comme β', β'' ont la parité de D' d'après une observation précédente, donc $\beta' - \beta'' \equiv 0 \pmod 2$, on aura, quel que soit σ,

$$\beta' - \beta'' \equiv 0 \pmod{2\sigma}.$$

Donc le nombre des *classes de solutions* (t, u) est μ.

Or (30) fournit toutes les solutions (t'', u'') équivalentes à une solution (t', u') lorsqu'on y fait

$$\frac{t_1 + u_1\sqrt{D}}{2} = \pm \left(\frac{T + U\sqrt{D}}{2}\right)^n = \pm E(D)^n,$$

(T, U) étant la solution positive minimum de $t^2 - Du^2 = 4$, et n prenant toutes les valeurs entières $\geqq 0$ et < 0, ce qui donne

$$\frac{t'' + u''\sqrt{D}}{2} = \pm E(D)^n \frac{t' + u'\sqrt{D}}{2}.$$

En faisant varier l'entier n on obtient au second membre les termes de deux (à cause du double signe) progressions géométriques de raison $E(D)$. On pourra donc trouver dans chaque classe de solutions un représentant (t'', u'') et un seul tel que

$$1 \leqq \frac{t'' + u''\sqrt{D'}}{2} < \frac{T + U\sqrt{D}}{2} = \frac{T + \sigma U\sqrt{D'}}{2}$$

(celle des deux progressions à prendre étant ainsi parfaitement déterminée).

Il y a donc, en y comprenant 1, μ termes $\frac{t''+u''\sqrt{D'}}{2}$ inférieurs à $\frac{T+\sigma U\sqrt{D'}}{2}$, et puisque tous ces termes, comme $\frac{T+\sigma U\sqrt{D'}}{2}$ lui-même, sont de la forme $E(D')^n$, on a

$$E(D) = E(D')^{\mu},$$
$$\mu = \frac{\log E(D)}{\log E(D')}.$$

Donc, comme pour le cas des déterminants négatifs, on peut écrire

$$(37)\quad D > 0, \qquad K(D) = rK\left(\frac{D}{\sigma^2}\right), \qquad l = r\mu, \qquad \mu = \frac{\log E(D)}{\log E\left(\frac{D}{\sigma^2}\right)}.$$

Extension au cas où σ n'est pas premier. — Soit maintenant

$$D = D'_0\sigma_1^2\sigma_2^2\ldots\sigma_k^2 = D'\Sigma^2, \qquad D' = D'_0,$$

les σ_i étant premiers, non nécessairement différents, Σ étant diviseur et constituant l'ordre considéré, D' ayant par suite la forme de discriminant. Posons

$$D'_0\sigma_1^2 = D'_1, \qquad D'_0\sigma_1^2\sigma_2^2 = D'_2, \qquad \ldots, \qquad D'_0\sigma_1^2\ldots\sigma_k^2 = D'_k = D,$$

et soit l_i la valeur du nombre l répondant à σ_i. On aura

$$K(D'_1) = l_1K(D'_0)\frac{\log E(D'_0)}{\log E(D'_1)},$$
$$K(D'_1) = l_2K(D'_1)\frac{\log E(D'_1)}{\log E(D'_2)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$K(D'_k) = l_kK(D'_{k-1})\frac{\log E(D'_{k-1})}{\log E(D'_k)},$$

d'où, par multiplication,

$$K(D'_k) = l_1l_2\ldots l_kK(D'_0)\frac{\log E(D'_0)}{\log E(D_k)} = K(D'_0)\prod_{i=1}^{i=k}\left[\sigma_i - \left(\frac{D'_{i-1}}{\sigma_i}\right)\right]\frac{\log E(D'_0)}{\log E(D)}.$$

Or $\left(\frac{D'_{i-1}}{\sigma_i}\right)$ est nul quand $D'_{i-1} \equiv 0 \pmod{\sigma_i}$ et égal à $\left(\frac{D'_0}{\sigma_i}\right)$ dans

le cas contraire. Donc

$$(38)\quad \begin{cases} \dfrac{K(D)}{K(D')} = \Sigma \prod\limits_{\sigma} \left[1 - \left(\dfrac{D'}{\sigma}\right)\dfrac{1}{\sigma}\right] \dfrac{\log E(D')}{\log E(D)}, \qquad D = D'\Sigma^2, \\ (\sigma \text{ parcourant tous les facteurs premiers différents de } \Sigma). \end{cases}$$

Nous retrouverons cette formule capitale par une méthode toute différente.

Si $D' = D_0$, on peut énoncer ainsi le résultat (38) :

L'expression

$$t K\left(\frac{D}{t^2}\right) \prod_q \left[1 - \left(\frac{D_0}{q}\right)\frac{1}{q}\right] \log E\left(\frac{D}{t^2}\right),$$

où le produit s'étend à tous les facteurs premiers distincts q de $\frac{D}{t^2}$ a la même valeur pour tous les ordres caractérisés par t.

Soient, pour un même discriminant D,

K une classe quelconque de diviseur $\Sigma = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k$, $D = D'\Sigma^2$,
K_i » » $\sigma_i (i = 1, 2, \ldots, k)$,
$\mathfrak{K}$ le groupe des classes primitives telles que $\mathfrak{K}K = K$,
$\mathfrak{K}_i$ » » $\mathfrak{K}_i K_i = K_i$.

$\mathfrak{K}$ se compose de toutes les classes pouvant représenter Σ^2, c'est-à-dire (paragraphe précédent, fin) de toutes les classes distinctes obtenues par la composition

$$(39)\qquad \mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2\ldots\mathfrak{K}_k;$$

on sait, par ce qui précède, que ces classes distinctes sont au nombre de $\frac{K(D)}{K(D')}$.

En particulier, si les σ_i sont premiers et différents, on a

$$\mathfrak{K}_i = E,\ F_{\beta_i},\quad E = \left(1, \lambda, \frac{\lambda^2 - D}{4}\right),\qquad F_{\beta_i} = \left(\sigma_i^2,\ \beta_i\sigma_i\ \frac{\beta_i^2\sigma_i^2 - D}{4\sigma_i^2}\right),$$

et les formes de $\mathfrak{K}_i$ sont au nombre de

$$\frac{K(D)}{K\left(\frac{D}{\sigma_i^2}\right)} = \sigma_i\left[1 - \left(\frac{D_0}{\sigma_i}\right)\frac{1}{\sigma_i}\right] \frac{\log E\left(\frac{D}{\sigma_i^2}\right)}{\log E(D)}.$$

Soient $D < 0$ et $k > 1$; alors $E\left(\frac{D}{\sigma_i^2}\right) = E(D)$, et l'on a, pour le nombre des classes fournies par l'algorithme (39),

$$\Sigma \prod_i \left[1 - \left(\frac{D_0}{\sigma_i}\right) \frac{1}{\sigma_i}\right] = \frac{K(D)}{K(D')},$$

c'est-à-dire qu'elles sont toutes distinctes.

Si $k = 1$, $E\left(\frac{D}{\sigma_i^2}\right)$ peut n'être pas égal à $E(D)$; mais le résultat est le même puisqu'il n'y a qu'un groupe $\mathfrak{R}_1$.

SECONDE SECTION.

FORMULE FONDAMENTALE. APPLICATIONS.

CHAPITRE IV.

L'ÉQUATION DE DIRICHLET GÉNÉRALISÉE PAR KRONECKER.

§ 14. Quelques théorèmes sur les séries infinies. Développement de $\sum_1^\infty u_n a_n^{1-x}$ suivant les puissances de x.

Je réunirai ici quelques propositions sur les séries pour n'avoir pas à y revenir.

1. La condition nécessaire et suffisante pour que la série

$$(8)\quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{m_1,\ldots,m_p} e^{\sum\limits^{i,k} \alpha_{ik} m_i m_k} \qquad (\alpha_{ik} = \alpha_{ki}) \\ (i, k = 1, 2, \ldots, p;\quad m_1, \ldots, m_p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \infty), \end{array} \right.$$

où les α_{ik} sont supposés réels (s'ils étaient complexes, on considérerait la série des modules) et leur déterminant $\neq 0$, est que la forme $\sum\limits_{i,k} \alpha_{ik} x_i x_k$ soit une forme négative.

En effet, la série (1) est convergente ou divergente en même temps que l'intégrale

$$(2)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\sum\limits^{i,k} \alpha_{ik} x_i x_k} dx_1 dx_2 \ldots dx_p.$$

Or on peut toujours trouver une substitution des x_i (et même une substitution orthogonale, mais peu importe ici) telle que la nouvelle forme $\sum\limits^{i,k}$ soit une somme de carrés sans rectangle.

Si J ($J \neq 0$) est le déterminant de la substitution, et β_{ik} les nouveaux coefficients, l'intégrale (2) prend la forme

$$(3) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\sum^{i} \beta_{ii} y_i^2} \, |J| \, dy_1 \ldots dy_p.$$

Or, d'une manière générale, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{a x^2} \, dx \qquad (a \text{ réel})$$

est infinie, si a est positif, et égale à $\left| \frac{\pi}{\sqrt{a}} \right|$, si a est négatif (1).

Donc, l'intégrale (3) sera infinie, si un seul des β_{ii} est positif, et finie, s'ils sont tous négatifs.

La considération de la série

$$\sum_{m_1, \ldots, m_p} e^{\sum^{i,k} \alpha_{ik} m_i m_k + \sum^{i} \alpha'_i m_i}$$

conduirait à l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\sum^{i} (\beta_{ii} y_i^2 + \beta'_i y_i)} \, |J| \, dy_1 \ldots dy_p,$$

et la conclusion serait qu'il suffit de considérer la série (1), car l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{a x^2 + b x} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}} d\left(x + \frac{b}{2a}\right) \qquad (a, b \text{ réels})$$

est finie ou infinie selon que a est négatif ou positif.

Enfin la série

$$(4) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{m_1, \ldots, m_p} \prod_j m_j^{\mu_j} e^{\sum^{i,k} \alpha_{ik} m_i m_k + \sum^{i} \alpha'_i m_i} \\ (i, k = 1, 2, \ldots, p; \quad j = 1, 2, \ldots, q; \; q \leqq p) \end{cases}$$

---

(1) Voir le *Cours d'Analyse* de M. Jordan, t. II, p. 167.

converge dans les mêmes circonstances, car l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^b e^{ax^2} dx \qquad (a, b \text{ réels}; \ b > 0)$$

est finie ou infinie selon que a est négatif ou positif.

En observant qu'un polynôme $F(x, y)$ du second degré en x et en y, où les coefficients des carrés sont positifs, peut s'écrire

$$\begin{aligned} &a^2x^2 + 2abxy + c^2y^2 + 2adx + 2(bd + ce)y + f \\ &= (ax + by + d)^2 + (cy + e)^2 + f - d^2 - e^2, \end{aligned}$$

on voit que les termes du reste de la série $\sum_{m,n} e^{-xF(m,n)}$ décroissent constamment quand x croît à partir d'une valeur A assez grande, et que, par suite, la série est *uniformément* convergente dans l'intervalle (A, ∞). La même remarque s'applique au cas de plus de deux variables.

2. La série ([1])

$$S = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_k u_k + \ldots$$

sera convergente si le module de

$$R = \sum_{n+1}^{n+p} \alpha_k u_k$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$ quel que soit p. Or, on a

$$\begin{aligned} R = \sum_{n+1}^{n+p} \alpha_k u_k = {} & \alpha_{n+p}(u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}) \\ & + (\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p})(u_{n+1} + \ldots + u_{n+p-1}) \\ & + (\alpha_{n+p-2} - \alpha_{n+p-1})(u_{n+1} + \ldots + u_{n+p-2}) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2})u_{n+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |R| < |\alpha_{n+p}|\,|u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| + |\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p}|\,|u_{n+1} + \ldots + u_{n+p-1}| \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + |\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}|\,|u_{n+1}|, \end{aligned}$$

([1]) Voir le *Cours d'Analyse* de M. Jordan, et le supplément IX de M. Dedekind aux *Vorlesungen über Zahlentheorie* de Dirichlet.

Si J ($J \neq 0$) est le déterminant de la substitution, et β_{ik} les nouveaux coefficients, l'intégrale (2) prend la forme

$$(3) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\sum^{i} \beta_{ii} y_i^2} \, |J| \, dy_1 \ldots dy_p.$$

Or, d'une manière générale, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{a x^2} \, dx \qquad (a \text{ réel})$$

est infinie, si a est positif, et égale à $\left| \frac{\pi}{\sqrt{a}} \right|$, si a est négatif (¹).

Donc, l'intégrale (3) sera infinie, si un seul des β_{ii} est positif, et finie, s'ils sont tous négatifs.

La considération de la série

$$\sum_{m_1, \ldots, m_p} e^{\sum^{i,k} \alpha_{ik} m_i m_k + \sum^{i} \alpha'_i m_i}$$

conduirait à l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\sum^{i} (\beta_{ii} y_i^2 + \beta'_i y_i)} \, |J| \, dy_1 \ldots dy_p,$$

et la conclusion serait qu'il suffit de considérer la série (1), car l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{a x^2 + b x} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}} d\left(x + \frac{b}{2a}\right) \qquad (a,\ b \text{ réels})$$

est finie ou infinie selon que a est négatif ou positif.

Enfin la série

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{m_1, \ldots, m_p} \prod_j m_j^{\mu_j} e^{\sum^{i,k} \alpha_{ik} m_i m_k + \sum^{i} \alpha'_i m_i} \\ (i, k = 1, 2, \ldots, p; \qquad j = 1, 2, \ldots, q; \ q \leqq p) \end{array} \right.$$

(¹) Voir le *Cours d'Analyse* de M. Jordan, t. II, p. 167.

converge dans les mêmes circonstances, car l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^b e^{ax^2} dx \qquad (a, b \text{ réels; } b > 0)$$

est finie ou infinie selon que a est négatif ou positif.

En observant qu'un polynôme $F(x, y)$ du second degré en x et en y, où les coefficients des carrés sont positifs, peut s'écrire

$$\begin{aligned} &a^2x^2 + 2abxy + c^2y^2 + 2adx + 2(bd + ce)y + f \\ &= (ax + by + d)^2 + (cy + e)^2 + f - d^2 - e^2, \end{aligned}$$

on voit que les termes du reste de la série $\sum\limits_{m,n} e^{-xF(m,n)}$ décroissent constamment quand x croît à partir d'une valeur A assez grande, et que, par suite, la série est *uniformément* convergente dans l'intervalle (A, ∞). La même remarque s'applique au cas de plus de deux variables.

2. La série (¹)

$$S = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_k u_k + \ldots$$

sera convergente si le module de

$$R = \sum_{n+1}^{n+p} \alpha_k u_k$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$ quel que soit p. Or, on a

$$\begin{aligned} R = \sum_{n+1}^{n+p} \alpha_k u_k = \alpha_{n+p}(u_{n+1} &+ \ldots + u_{n+p}) \\ &+ (\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p})(u_{n+1} + \ldots + u_{n+p-1}) \\ &+ (\alpha_{n+p-2} - \alpha_{n+p-1})(u_{n+1} + \ldots + u_{n+p-2}) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2})u_{n+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |R| < |\alpha_{n+p}||u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| + |\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p}||u_{n+1} + \ldots + u_{n+p-1}| \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + |\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}||u_{n+1}|, \end{aligned}$$

(¹) Voir le *Cours d'Analyse* de M. Jordan, et le supplément IX de M. Dedekind aux *Vorlesungen über Zahlentheorie* de Dirichlet.

et, si U est le maximum des $|u_{n+1}+\ldots+u_{n+p-i}|$ $(i=0,1,\ldots,p-1)$,

$$(5)\qquad |R|<U\{|\alpha_{n+1}-\alpha_{n+2}|+\ldots+|\alpha_{n+p-1}-\alpha_{n+p}|+|\alpha_{n+p}|\}.$$

Donc S convergera, en particulier, si les sommes $\sum_{k=1}^{k=m} u_k$ restent finies quand m croît indéfiniment et si, en même temps, la série

$$|\alpha_1-\alpha_2|+|\alpha_2-\alpha_3|+\ldots$$

converge, α_k tendant vers zéro avec $\frac{1}{k}$. Ces conditions sont évidemment vérifiées si les α_k sont réels et gardent le même signe tandis qu'ils décroissent constamment jusqu'à zéro; on a alors

$$(6)\qquad |\alpha_1-\alpha_2|+|\alpha_2-\alpha_3|+\ldots+|\alpha_{n-1}-\alpha_n|=|\alpha_1-\alpha_n|.$$

On voit par la démonstration précédente que, si les α_k sont des fonctions d'une variable x vérifiant, quel que soit x dans un certain intervalle, les conditions marquées, la série $\Sigma\alpha_k u_k$ convergera uniformément dans cet intervalle, pourvu que les α_k y tendent uniformément vers zéro avec $\frac{1}{k}$.

Prenons, par exemple,

$$\alpha_k=\frac{\log^h a_k}{a_k^{1+x}},$$

les a_k étant réels et croissant avec k sans limite $(a_1\geqq 1)$. La série

$$f^{(h)}(x)=\sum_{k=1}^{k=\infty} u_k\frac{\log^h a_k}{a_k^{1+x}}$$

sera uniformément convergente et, par suite, continue en x dans l'intervalle $(-1+\varepsilon,\infty)(\varepsilon>0)$, quel que soit h. La formule de Maclaurin donne donc, si l'on remarque que $f^{(h)}(x)$ est la dérivée d'ordre h de $f^{(0)}(x)$,

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{u_k}{a_k^{1+x}}=\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{u_k}{a_k}-x\sum_{k=1}^{k=\infty}u_k\frac{\log a_k}{a_k}+\ldots+R_h,$$

$$R_h=(-1)^h x^h\int_0^1(1-t)^{h-1}\sum_{k=1}^{k=\infty}u_k\frac{\log^h a_k}{(h-1)!\,a_k^{1+tx}}\,dt,$$

et, tant que h reste fini, R_h est un infiniment petit d'ordre h, quel que soit x dans l'intervalle considéré.

Je dis que, si $x > 0$, R_h tend vers zéro avec $\frac{1}{h}$. En effet, le coefficient de u_k dans la série qui figure sous le signe $\int$ est, en mettant y pour $\log a_k$ et β pour $1 + tx$,

$$z = \frac{y^h}{\Gamma(h)e^{\beta y}} \qquad (\beta > 0).$$

Comme on a

$$\frac{\partial \log z}{\partial y} = \frac{h}{y} - \beta,$$

le maximum de z pour chaque valeur de h est unique et a pour valeur

$$\frac{\left(\frac{h}{\beta}\right)^h}{\Gamma(h)e^h} = \frac{1}{\Gamma(h)(ah)^{-h}}, \qquad a = \frac{1}{\beta e}.$$

Or, la définition

$$\Gamma(h) = \int_0^\infty x^{h-1} e^{-x}\, dx,$$

donne, si l'on y pose $x = ahy$,

$$\begin{aligned}\Gamma(h)(ah)^{-h} &= \int_0^\infty y^{h-1} e^{-ahy}\, dy \\ &= \int_0^1 y^{h-1} e^{-ahy}\, dy + \int_0^1 y^{-h-1} e^{-\frac{ah}{y}}\, dy.\end{aligned}$$

La première intégrale est comprise entre 0 et $\int_0^1 y^{h-1}\, dy = \frac{1}{h}$. La quantité placée sous le signe $\int$ de la seconde a pour dérivée

$$-\frac{(h+1)e^{-\frac{ah}{y}}}{y^{h+2}}\left(y - \frac{ah}{h+1}\right).$$

Son maximum a donc lieu pour $y = \frac{ah}{h+1}$ et il est

$$\left(\frac{ahe}{h+1}\right)^{-(h+1)}$$

ou, en posant, $h + 1 = n$,

$$e^{-n(1+\log a)}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Quand n croît indéfiniment, le dernier facteur tend vers e. Le précédent tend vers l'infini si l'on a

$$\log a < -1 \quad \text{ou} \quad a < \frac{1}{e}, \quad \beta > 1, \quad 1 + tx > 1, \quad x > 0.$$

Cela posé, remarquons que

$$\int_0^1 y^{-h-1} e^{-\frac{ah}{y}} dy > \int_0^{\frac{ah}{h+1}} y^{-h-1} e^{-\frac{ah}{y}} dy$$
$$> \int_0^{a\left(1-\frac{1}{n}\right)} y^{-n} e^{-\frac{a}{y}(n-1)} dy.$$

Or, cette dernière quantité croît indéfiniment avec n, car sa dérivée par rapport à n, qui est

$$\int_0^{a\left(1-\frac{1}{n}\right)} \frac{n e^{-\frac{a}{y}(n-1)}}{y^{n+2}} \left[a\left(1-\frac{1}{n}\right) - y\right] dy + \frac{a}{n^2} e^{-n(1+\log a)} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n},$$

croît elle-même avec n sans limite. Donc le maximum de z tend vers zéro.

Donc, si k_h est la valeur de k pour laquelle z est maximum quand on ne donne à y que les valeurs isolées $\log a_k$ et U_k le maximum de $\left|\sum_{k=1}^{k=m} u_k\right|$ quand m croît de 1 à ∞, on obtiendra comme on a obtenu (5) et (6) (seulement les quantités qui jouent ici le rôle des α_k croissent constamment avec k jusqu'à ce que $k = k_h$, puis décroissent constamment avec $\frac{1}{k}$ jusqu'à zéro),

$$\left|\sum_{k=1}^{k=\infty} u_k \frac{\log^h a_k}{(h-1)!\, a_k^{1+tx}}\right|$$
$$< U_h \left[\left|\frac{\log^h a_1}{(h-1)!\, a_1^{1+tx}} - \frac{\log^h a_{k_h}}{(h-1)!\, a_{k_h}^{1+tx}}\right| + \frac{\log^{h+1} a_{k_h+1}}{(h-1)!\, a_{k_h+1}}\right].$$

Cette dernière quantité tendant vers zéro avec $\frac{1}{h}$, on aura, pour $x > 0$,

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{u_n}{a_n^{1+x}} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{u_n}{a_n} - x \sum_{n=1}^{n=\infty} u_n \frac{\log a_n}{a_n} + \ldots + (-1)^k \frac{x^k}{k!} \sum_{n=1}^{n=\infty} u_n \frac{\log^k a_n}{a_n} + \ldots,$$

et, comme le premier membre est continu en x pour $x \geqq 0$, le second, qui converge et représente le premier pour $x > 0$ et pour $x = 0$, est aussi continu en x pour $x \geqq 0$. Cette proposition comprend comme cas particulier un théorème de Dirichlet (¹).

Un cas particulier très utile est celui où $u_n = \left(\frac{D_0}{n}\right)$, D_0 étant un discriminant fondamental et $a_n = n$. On voit que la suite des $u_n (n = 1, 2, \ldots, \infty)$ se décompose en tranches de la forme

$$\sum_{n=k|D_0|+1}^{n=(k+1)|D_0|} \left(\frac{D_0}{n}\right) = \sum_{n=1}^{n=|D_0|} \left(\frac{D_0}{n}\right) = 0 \qquad [\S\ 5, (12)].$$

On a donc

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{D_0}{n}\right) \frac{1}{n^{1+\rho}} &= \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{D_0}{n}\right) \frac{1}{n} - \rho \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{D_0}{n}\right) \frac{\log n}{n} + \ldots \\ &\quad + (-1)^k \frac{\rho^k}{k!} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{D_0}{n}\right) \frac{\log^k n}{n} + \ldots \end{aligned} \right.$$

et, par conséquent,

$$(8) \qquad \lim_{\rho=0} \left[\rho \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{D_0}{n}\right) \frac{1}{n^{1+\rho}} \right] = 0.$$

3. Si l'on a

$$a_1 u_1^\rho + a_2 u_2^\rho + \ldots = a'_1 u'^\rho_1 + a'_2 u'^\rho_2 + \ldots,$$

pour toutes les valeurs de ρ supérieures à une grandeur donnée r, les a_i, a'_i étant réels et $\neq 0$, les u_i, u'_i étant positifs et décroissant constamment à partir d'un certain rang, enfin les séries convergeant pour $\rho > r$, on aura aussi

$$a_i = a'_i, \qquad u_i = u'_i, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, \infty \quad (^2).$$

En effet, les quantités $a_i u_i^{r+\varepsilon}$, $a'_i u'^{r+\varepsilon}_i$ jouant le rôle des u_k du troisième théorème, et $u_i^{\rho-r-\varepsilon}$, $u'^{\rho-r+\varepsilon}_i$ celui des α_k, on voit que les

---

(¹) *Recherches sur quelques applications de l'Analyse infinitésimale à la théorie des nombres*, § I (*Journal de Crelle*, t. 19), et *Zahlentheorie*, §§ 101, 143.

(²) Comparer les *Vorlesungen über Zahlentheorie* de Dirichlet, §§ 91, 143.

deux séries sont fonctions continues de ρ pour $\rho > r$; de plus, les u_i, u'_i décroissant à partir d'un certain rang, on peut ranger les termes de manière que les u_i, u'_i décroissent à partir du premier terme, ce que nous supposerons fait (¹). Soit alors $u_1 \geqq u'_1$; on aura

$$1 + \frac{a_2}{a_1}\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^\rho + \frac{a_3}{a_1}\left(\frac{u_3}{u_1}\right)^\rho + \ldots = \frac{a'_1}{a_1}\left(\frac{u'_1}{u_1}\right)^\rho + \frac{a'_2}{a_1}\left(\frac{u'_2}{u_1}\right)^\rho + \ldots,$$

pour toutes les valeurs de ρ supérieures à r. On peut prendre n assez grand pour que l'ensemble de tous les termes d'indice $> n$ dans les deux membres soit $< \varepsilon$ quel que soit $\rho > r$, puis ρ assez grand pour que la somme des termes d'indice $\leqq n$ qui dépendent de ρ dans le second membre soit elle-même $< \varepsilon$. Alors l'égalité précédente exige $\frac{u'_1}{u_1} = 1$ pour que le premier terme du second membre soit fini, puis $\frac{a'_1}{a_1} = 1$ pour qu'il soit égal à 1. On verrait de même ensuite que $a_2 = a'_2$, $u_2 = u'_2$, ...

4. Considérons une série à termes réels positifs, fonctions de x

$$S(x) = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots = S_n(x) + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots = S_n(x) + R(n, x),$$

uniformément convergente pour $x > \xi$ (ξ arbitraire mais > 0) et divergente pour $x = 0$. $\Sigma x^\rho u_n$ est nul avec x si les u_i restent finis pour $x = 0$; mais il n'en sera pas nécessairement de même de la limite de $\Sigma x^\rho u_n = x^\rho S(x)$ quand x tend vers zéro.

Si $x S(x)$ reste fini quand x tend vers zéro, l'intégrale

$$\int_0^\beta x^\rho S(x)\, dx \qquad (\beta > 0 \text{ et fini})$$

est égale à

$$\sum_{1,\infty}^{n} \int_0^\beta x^\rho u_n\, dx,$$

et elle est fonction continue de ρ pour $\rho > 0$. Si de plus la série $x^\rho S(x)$ converge uniformément pour $\rho > 0$, quand x est

---

(¹) On suppose que les u_i diffèrent les uns des autres. Si plusieurs de suite étaient égaux, on les réunirait d'abord en un seul terme.

supérieur à une constante a convenablement choisie, et si elle tend vers zéro avec $\frac{1}{x}$ *comme* $\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}$ *pour* $\rho > 0$, β *pourra être infini.*

En effet, soit d'abord β fini; pour établir la première partie, il suffit de prouver que l'intégrale

$$I_n = \int_0^\beta x^\rho \, R(n, x)\, dx = \int_0^\beta x^{\rho-1} x \, R(n, x)\, dx$$

peut être rendue aussi petite qu'on veut en prenant n assez grand. Or, on a

$$I_n = \int_0^\alpha x^{\rho-1} x \, R(n, x)\, dx + \int_\alpha^\beta x^{\rho-1} x \, R(n, x)\, dx \qquad (0 < \alpha < \beta),$$

et l'on peut prendre α assez petit pour que le premier terme soit $< \frac{\varepsilon}{2}$ quel que soit n, puis n assez grand pour que l'on ait

$$x \, R(n x) < \frac{1}{2} \, \frac{\rho\varepsilon}{\beta^\rho - \alpha^\rho},$$

quel que soit x entre α et β; on aura alors

$$I_n < \varepsilon.$$

Si β était infini, on partagerait le champ de I_n en deux parties par une valeur finie $b > a$; le raisonnement précédent s'appliquerait à la première intégrale, et l'on aurait

$$\int_0^b x^\rho \, S(x)\, dx = \sum_{1, \infty}^{n} \int_0^b x^\rho u_n \, dx;$$

d'ailleurs, $x^\rho \, S(x)$ étant uniformément convergente pour $x > a$,

$$\int_b^\infty x^\rho \, S(x)\, dx = \sum_{1, \infty}^{n} \int_b^\infty x^\rho u_n \, dx;$$

donc

$$\int_0^\infty x^\rho \, S(x)\, dx = \sum_{1, \infty}^{n} \int_0^\infty x^\rho u_n \, dx.$$

Pour établir la seconde partie de la proposition, nous suppo-

serons encore β d'abord fini. Il s'agit de prouver que l'intégrale

$$I = \int_0^\beta (x^{\rho+\Delta\rho} - x^\rho)\, S(x)\, dx$$

peut être rendue aussi petite que l'on veut. Or, le théorème des accroissements finis donne

$$x^{\rho+\Delta\rho} - x^\rho = \Delta\rho\, x^{\rho+\theta\Delta\rho} \log x \qquad (0 < \theta < 1).$$

Donc

$$I = \Delta\rho \int_0^\beta x^{\rho+\theta\Delta\rho-1} [x\, S(x)] \log x\, dx.$$

Il suffit de montrer que l'intégrale qui forme le cofficient de $\Delta\rho$ est finie.

Or cela est évident, puisque la fonction placée sous le signe $\int$ n'est pas infinie du premier ordre pour $x = 0$.

Si β est infini, on décompose le champ en deux parties par une valeur b finie et $> a$, ce qui donne

$$\int_0^\infty x^\rho S(x)\, dx = \int_0^b x^\rho S(x)\, dx + \int_b^\infty x^\rho S(x)\, dx.$$

La première intégrale du second membre est fonction continue de ρ d'après ce qui précède. La seconde peut s'écrire

$$\int_b^\infty x^\rho S_n(x)\, dx + \int_b^\infty x^\rho\, R(n, x)\, dx;$$

on peut prendre n assez grand pour que la dernière intégrale soit d'une petitesse arbitraire quel que soit $b > a$, puis b assez grand pour que la première soit également d'une petitesse arbitraire. Donc

$$\int_0^\infty x^\rho S(x)\, dx$$

est fonction continue de ρ et la proposition énoncée au début est établie dans ses deux parties.

Si l'on a, au lieu de $S(x)$, une série double à termes positifs satisfaisant aux mêmes conditions, on rangera ses termes suivant une loi quelconque; elle sera ainsi assimilée à une série simple et les conclusions précédentes subsisteront encore. Ces conclusions subsisteront également pour une série double à termes complexes, si la série des modules satisfait aux mêmes conditions que $S(x)$.

Ainsi les séries

$$S(x) = \sum_{0, \infty}^{n} e^{-nx},$$

$$S_1(x) = \sum_{m,n} e^{-xf(m,n)} \qquad (m,\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\ \pm \infty),$$

$$f(m,n) = am^2 + bmn + cn^2,$$

la partie réelle de $f(m, n)$ étant une forme positive $\varphi(m, n)$ de discriminant D, donnent lieu au théorème précédent.

En effet, la convergence est d'abord uniforme pour

$$x > \xi (\xi \text{ arbitraire} > 0),$$

puisque les modules de tous les termes sont fonctions décroissantes de x. Il faut ensuite montrer que les séries $x\,S(x)$, $x\,S_1(x)$ ne croissent pas indéfiniment quand x tend vers zéro. Cela est évident pour

$$x\,S(x) = \frac{x}{1 - e^{-x}},$$

qui tend vers 1 quand x tend vers 0.

Considérons maintenant la série $\sum_{m,n} x e^{-x\varphi(m,n)}$ et rangeons les termes suivant une loi telle que $\varphi(m, n)$ n'aille jamais en décroissant.

Soit

$$S_0(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} x e^{-xu_n}$$

la série ainsi obtenue. On verra au § 17 que, si $f(t)$ est le nombre des u_n qui sont $\leqq f(t)$,

$$\lim_{t=\infty} \frac{f(t)}{t} = \lim_{n=\infty} \frac{n}{u_n} = \frac{2\pi}{\sqrt{-D}} = \omega.$$

On peut donc trouver k tel que, pour $n \geqq k$,

$$\omega - \varepsilon < \frac{n}{u_n} < \omega + \varepsilon,$$

ε étant donné arbitrairement, et par suite

$$(\omega - \varepsilon) \sum_{n=k}^{n=\infty} y e^{-ny} < \sum_{n=k}^{n=\infty} x e^{-xu_n} < (\omega + \varepsilon) \sum_{n=k}^{n=\infty} z e^{-nz},$$

$$x = y(\omega - \varepsilon) = z(\omega + \varepsilon).$$

$\sum_{n=k}^{n=\infty} xe^{-nx}$ comme $x\,S(x)$ tendant vers 1, on peut conclure que $x\,S_0(x)$ tend vers $\frac{2\pi}{\sqrt{-D}}$.

Nous déduirons d'ailleurs de la transformation des fonctions elliptiques une formule [§ 23, (19)] qui, si l'on pose dans $S_0(x)$, $x = \frac{2\pi u}{\sqrt{-D}}$, donne immédiatement ce résultat.

On voit donc que $x\,S_1(x)$ reste finie quand x tend vers zéro.

Enfin les séries $x^\rho\,S(x)$, $x^\rho\,S_1(x)$ convergent uniformément pour $x > \rho$, car, pour $x > \rho$, la dérivée en x du terme général est toujours < 0; de plus tous leurs termes tendent vers zéro comme e^{-x} quand x croît indéfiniment.

Donc les intégrales

$$\int_0^\infty x^\rho \sum_{0,\infty}^{n} e^{-nx}\,dx, \qquad \int_0^\infty x^\rho \sum_{m,n} e^{-xf(m,n)}\,dx$$

sont respectivement égales à

$$\sum_{0,\infty}^{n} \int_0^\infty x^\rho e^{-nx}\,dx, \qquad \sum_{m,n} \int_0^\infty x^\rho e^{-xf(m,n)}\,dx,$$

et sont fonctions continues de ρ pour $\rho > 0$.

§ 15. Équation de Dirichlet (1).

Choisissons dans chaque classe de déterminant D un représentant (a, b, c), et considérons la somme

$$\sum_{a,b,c} \sum_{\alpha,\gamma} \frac{1}{(a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2)^{1+\rho}},$$

$\sum_{a,b,c}$ s'étendant à tous les représentants des classes, et α, γ parcourant tous les couples de nombres entiers (positifs ou négatifs) pre-

---

(1) Voir KRONECKER, *Sitzungsberichte*, p. 768-779; 1885.

miers entre eux, sauf $\alpha = \gamma = 0$. Désignons en général par m les nombres ainsi fournis par $a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2$. Il y aura $\frac{1}{2}\psi(D, 4m)$ groupes de représentations du nombre m, et chaque groupe contiendra autant de représentations qu'il y a de solutions à l'équation $t^2 - Du^2 = 4$.

Si $D < 0$, le nombre τ de ces solutions est fini :

$$\tau = 2 \text{ pour } D < -4, \quad \tau = 4 \text{ pour } D = -4, \quad \tau = 6 \text{ pour } D = -3 \text{ (§ 9)}.$$

Si $D > 0$, le nombre des solutions et, par conséquent, celui des représentants contenus dans chaque groupe, est infini. Nous isolerons alors dans chaque groupe une des représentations de la manière suivante. Toutes les représentations (α, γ) du groupe correspondant à la racine n_i de $n^2 \equiv D (\text{mod} \, 4m)$ sont fournies par le premier et le troisième nombre des substitutions $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ transformant (a, b, c) en (m, n_i, l_i) $(n_i^2 - 4ml_i = D)$. Or, $\begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \gamma_0 & \delta_0 \end{pmatrix}$ étant une de ces substitutions, toutes les autres sont de la forme

$$(1) \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2}[\alpha_0 t - (b\alpha_0 + 2c\gamma_0)u] & \frac{1}{2}[\beta_0 t - (b\beta_0 + 2c\delta_0)u] \\ \frac{1}{2}[\gamma_0 t + (2a\alpha_0 + b\gamma_0)u] & \frac{1}{2}[\delta_0 t + (2a\beta_0 + b\delta_0)u] \end{pmatrix}.$$

Donc la forme générale des nombres représentants est

$$(2) \qquad \alpha = \tfrac{1}{2}[\alpha_0 t - (b\alpha_0 + 2c\gamma_0)u], \qquad \gamma = \tfrac{1}{2}[\gamma_0 t + (2a\alpha_0 + b\gamma_0)u].$$

Pour toutes ces valeurs, on a

$$a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2 = m,$$

$$(3) \qquad 4am = [2a\alpha + (b + \sqrt{D})\gamma][2a\alpha + (b - \sqrt{D})\gamma],$$

les deux derniers facteurs étant égaux respectivement, d'après (2), à

$$[2a\alpha_0 + (b + \sqrt{D})\gamma_0]\frac{t + u\sqrt{D}}{2}, \quad [2a\alpha_0 + (b - \sqrt{D})\gamma_0]\frac{t - u\sqrt{D}}{2},$$

et, par conséquent, toutes les valeurs de ces facteurs étant de la forme

$$(4) \qquad \begin{cases} 2a\alpha + (b + \sqrt{D})\gamma = \pm[2a\alpha_0 + (b + \sqrt{D})\gamma_0]E^n(D), \\ 2a\alpha + (b - \sqrt{D})\gamma = \pm[2a\alpha_0 + (b - \sqrt{D})\gamma_0]E^{-n}(D). \end{cases}$$

Toutes les quantités $2a\alpha + (b \pm \sqrt{D})\gamma$ étant ainsi en progression géométrique de raison $E(D) > 1$, on peut toujours, étant donné N réel > 0, déterminer, et d'une seule manière, le signe à prendre dans les seconds membres de (4) et la valeur de n pour que

$$N < 2a\alpha + (b + \sqrt{D})\gamma \leqq NE(D).$$

Supposons les représentants (a, b, c) des classes choisis de manière que a soit > 0 (§ 9) et prenons $N = \sqrt{4am}$. On pourra *isoler* une représentation (α, γ) parmi toutes celles d'un groupe au moyen des conditions

$$\sqrt{4am} < 2a\alpha + (b + \sqrt{D})\gamma \leqq E(D)\sqrt{4am},$$

ou, en élevant au carré d'après (3),

$$2a\alpha + (b - \sqrt{D})\gamma < 2a\alpha + (b + \sqrt{D})\gamma \leqq E^2(D)[2a\alpha + (b - \sqrt{D})\gamma].$$

Prenons $\sqrt{D}$ positivement; la première inégalité donnera $\gamma > 0$, et la seconde, multipliée par $E^{-1}(D) = \frac{T - U\sqrt{D}}{2}$, quantité comprise entre 0 et 1,

$$2a\alpha + b\gamma \geqq \frac{T}{U}\gamma.$$

On a donc les deux conditions isolantes,

$$\gamma > 0, \qquad 2a\frac{\alpha}{\gamma} + b \geqq \frac{T}{U}.$$

De ces conditions résulte que $a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2$ est > 0; elles donnent en effet

$$2a\alpha + b\gamma \geqq \frac{T}{U}\gamma \qquad \text{avec} \qquad T^2 - DU^2 = 4;$$

donc

$$(2a\alpha + b\gamma)^2 \geqq \frac{T^2}{U^2}\gamma^2, \qquad \frac{T^2}{U^2} > D;$$

donc

$$(2a\alpha + b\gamma)^2 > D\gamma^2,$$
$$4a(a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2) > 0,$$

et a est positif.

Ayant ainsi isolé une représentation dans chaque groupe, on

pourra faire $\tau = 1$ quand $D > 0$, et on aura l'équation

$$(5) \qquad \frac{\tau}{2}\sum_m \frac{\psi(D, 4m)}{m^{1+\rho}} = \sum_{a,b,c}\sum_{\alpha,\gamma} \frac{1}{(a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2)^{1+\rho}}.$$

Si $D < 0$, α, γ parcourent tous les nombres positifs et négatifs premiers entre eux, sauf $\alpha = \gamma = 0$.

Si $D > 0$, α, γ sont en outre assujettis aux deux conditions

$$\gamma > 0, \qquad 2a\frac{\alpha}{\gamma} + b \geqq \frac{T}{U}.$$

Enfin, $\tau = 1$ si $D > 0$, $\tau = 2$ si $D < -4$, $\tau = 4$ si $D = -4$, $\tau = 6$ si $D = -3$.

On ne prend que des formes à premier coefficient $a > 0$.

D'après ces fixations, $a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2$ ne prendra que des valeurs positives.

Si l'on supprime dans les deux membres de (5) les nombres non premiers à Q, on pourra écrire, d'après la formule (8) du § 11,

$$\tau\sum \frac{1}{k^{1+\rho}} \sum \left(\frac{D}{h}\right) \frac{1}{h^{1+\rho}} = \sum \frac{1}{k^{2(1+\rho)}} \sum_{a,b,c}\sum_{\alpha,\gamma} \frac{1}{(a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2)^{1+\rho}},$$

k, h parcourant tous les nombres positifs premiers à Q, ou

$$(6) \qquad \tau\sum \left(\frac{D}{h}\right)(hk)^{-1-\rho} = \sum_{a,b,c}\sum_{m,n} (am^2 + bmn + cn^2)^{-1-\rho},$$

m, n parcourant tous les entiers positifs et négatifs (sauf $m = n = 0$) pour lesquels $am^2 + bmn + cn^2$ est premier à Q.

Cette égalité ayant lieu pour toutes les valeurs de ρ supérieures à zéro, elle est identique (§ 14, 3) en ce sens que à toute somme de termes égaux dans un membre répond une somme égale de termes identiques dans le second. On peut donc écrire la relation plus générale

$$\tau\sum \left(\frac{D}{h}\right) F(hk) = \sum_{a,b,c}\sum_{m,n} F(am^2 + bmn + cn^2),$$

h, k parcourant tous les entiers positifs premiers à Q, m, n tous les entiers positifs et négatifs (sauf $m = n = 0$) pour lesquels $am^2 + bmn + cn^2$ est premier à Q et F étant une fonction assu-

rant la convergence des séries, ou enfin cette autre plus commode et plus élégante,

$$(7)\quad \begin{cases} \tau \sum\limits_{h,k} \left(\frac{Q^2}{h}\right)\left(\frac{D}{k}\right) F(hk) = \sum\limits_{a,b,c} \sum\limits_{m,n} \left(\frac{Q^2}{m}\right) F(am^2 + bmn + cn^2), \\ h, k = 1, 2, 3, \ldots +\infty, \\ m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm\infty, \text{ sauf } m = n = 0, \text{ si } D < 0; \\ \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty;\ n = 1, 2, \ldots, \infty \text{ et } 2a\frac{m}{n} + b > \frac{T}{U}, \\ \quad \text{si } D > 0; \\ (a, b, c) \text{ parcourt un système de représentants; } a > 0 \text{ premier} \\ \quad \text{à } Q;\ b \text{ et } c \text{ divisibles par tous les facteurs premiers de } Q. \end{cases}$$

On peut remarquer que, d'après (6), le nombre des représentations d'un nombre N par la forme (a, b, c) est

$$\tau \sum_d^N \left(\frac{D}{d}\right),$$

d parcourant tous les diviseurs de N.

§ 16. Les quantités ε_n [1].

Définissons les quantités ε_n par l'égalité

$$(1)\qquad \prod_p (1 - p^{-z}) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \varepsilon_n n^{-z},$$

où p parcourt tous les nombres premiers positifs et où la partie réelle de z est > 1. Il en résulte

$$(2)\quad \begin{cases} \varepsilon_1 = 1, \\ \varepsilon_n = 0 \text{ quand } n \text{ est divisible par un carré } (\varepsilon_0 = 0), \\ \varepsilon_n = (-1)^\nu, \text{ quand } n \text{ est un produit de } \nu \text{ facteurs premiers différents.} \end{cases}$$

On peut écrire (1) sous la forme

$$\frac{1}{\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \varepsilon_n n^{-z}} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-z}} = \prod_p (1 + p^{-z} + p^{-2z} + \ldots) = \sum_{n=1}^{n=\infty} n^{-z}\ [2].$$

---

[1] Voir KRONECKER, *Sitzungsberichte*, p. 707; 1886.

[2] On trouvera une démonstration rigoureuse de la dernière égalité dans l'*Introduction à la Théorie des fonctions d'une variable* par M. Tannery.

Donc

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} n^{-z} \sum_{n=1}^{n=\infty} \varepsilon_n n^{-z} = 1$$

ou

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \varepsilon_n (mn)^{-z} = 1.$$

Or, pour $mn = 1$, $\varepsilon_n = \varepsilon_1 = 1$; donc

$$\sum_{m,n} \varepsilon_n (mn)^{-z} = 0 \qquad (m, n = 1, 2, \ldots \infty, \text{ sauf } m = n = 1),$$

ou, en posant $mn = k$ et en changeant l'ordre des termes,

$$\sum_{k=2}^{k=\infty} \Big(\sum_m \varepsilon_m\Big) k^{-z} = 0,$$

m parcourant tous les diviseurs de k. Cela exige (§ 14, 3)

(3) $$\sum_m \varepsilon_m = 0$$

(m parcourant tous les diviseurs d'un nombre quelconque supérieur à l'unité).

On peut procéder inversement et définir du premier coup les ε par (2), puis démontrer directement de la manière suivante la propriété (3). Comme ε_m est nul si n a un diviseur carré, on peut remplacer le nombre considéré par le produit de ses facteurs premiers différents $q_1 q_2 \ldots q_n = \mathrm{P}$. Or,

pour le diviseur 1	$\varepsilon_1 = 1$;
pour les diviseurs $q_1, q_2, \ldots, q_n$, la somme des ε est ...	$-n$;
» $q_1 q_2, q_1 q_3, q_2 q_3,$ » ...	$+\frac{n(n-1)}{1.2}$;
....	....
pour le diviseur $q_1 q_2, \ldots, q_n = \mathrm{P}$	$\varepsilon_{\mathrm{P}} = (-1)^n$;

donc

$$\sum_m \varepsilon_m = (1-1)^n = 0.$$

Ainsi, m parcourant, comme précédemment, tous les diviseurs

de k,

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}\sum_{m}\varepsilon_m k^{-z} = 1 = \sum_{1}^{\infty} n^{-z}\sum_{1}^{\infty}\varepsilon_n n^{-z},$$

et

$$\sum_{n}\varepsilon_n n^{-z} = \prod_{p}(1-p^{-z}).$$

Soient alors $f(n)$, $g(n)$ deux fonctions quelconques du nombre n, et $h(n)$ définie par

$$(4)\qquad h(n) = \sum_{d,d'}^{n} f(d)\,g(d') \qquad (dd' = n).$$

On aura

$$(5)\qquad f(n) = \sum_{d,d'}^{n}\varepsilon_d\, g(d)\,h(d') \qquad (dd' = n),$$

à condition que la fonction g ait les propriétés

(6) $g(mn) = g(m)\,g(n), \qquad g(1) = 1$
(la seconde résultant de la première pour $m = n = 1$ lorsque $g(1) \neq 0$).

En effet, portons dans (5) la valeur de h définie par (4); il viendra

$$(5')\qquad \begin{cases} f(n) = \displaystyle\sum_{d,d_1,d_2}^{n}\varepsilon_d\, g(d)\,g(d_1)\,f(d_2) \qquad (dd_1d_2 = n),\\ \quad\;\;\, = \displaystyle\sum_{d,d_1,d_2}^{n}\varepsilon_d\, g(dd_1)\,f(d_2),\end{cases}$$

$$(7)\qquad f(n) = \sum_{l,m}^{n} f(l)\,g(m)\sum_{d}^{m}\varepsilon_d \qquad (lm = n)$$

(d parcourant tous les diviseurs de m).

La dernière somme s'étendant à tous les diviseurs d de m est nulle, sauf pour $m = 1$, $l = n$, ce qui vérifie (5).

On démontrerait de même que (4) résulte de (5) moyennant les conditions (6).

Ainsi l'une des deux relations (4), (5) jointe à (6) entraîne l'autre.

Remarquons que les égalités (4), (5), avec la condition (6) qui les fait concorder contiennent la relation (3). Il suffit de prendre pour $f(n)$ une fonction nulle pour $n > 1$ et égale à 1 pour $n = 1$, par exemple $1 - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(n-1)x}{x}\,dx$; (4) donne alors, pour un nombre quelconque, $g(n) = h(n)$, et (7)

$$\sum_d^n \varepsilon_d = 0$$

(d parcourant tous les diviseurs de $n > 1$).

Quelques exemples simples montreront l'utilité des quantités ε_n. On a d'abord

$$\varphi(n) = n\sum_d^n \frac{\varepsilon_d}{d} = \sum_{d,d'}^n \varepsilon_d d', \qquad \text{donc} \qquad n = \sum_d^n \varphi(d).$$

Considérons en second lieu l'équation de degré n^2

$$\Phi_n(x) = \prod_{h,h'}\left(x - \sqrt{\varkappa}\, m\,\frac{4hK + 2h'iK'}{n}\right) = 0 \qquad (h, h' = 1, 2, \ldots, n),$$

où $\varkappa$ est le module, $4K$ et $2iK'$ les périodes. Réunissons dans un même groupe les racines où h, h', n ont le plus grand commun diviseur d, et soit $F_{d'}(x) = 0$ $(dd' = n)$ l'équation de premier coefficient 1 dont les racines sont celles du groupe considéré. On aura évidemment

$$(8) \qquad \Phi_n(x) = \prod_d^n F_d(x), \qquad \log\Phi_n(x) = \sum_d^n \log F_d(x)$$

(d parcourant les diviseurs de n).

La formule (4) donne alors, en prenant

$$h(n) = \log\Phi_n(x), \qquad f(d) = \log F_d(x), \qquad g(d') = 1,$$

$$\log F_n(x) = \sum_{d,d'}^n \varepsilon_{d'}\log\Phi_d(x), \qquad F_n(x) = \prod_{d,d'}^n [\Phi_d(x)]^{\varepsilon_{d'}}.$$

Si $f(d)$ désigne maintenant le degré de $F_d(x)$, déterminé par (8), on aura

$$n^2 = \sum_d^n f(d).$$

Si alors, dans (4), on prend $g(n) = 1$, $h(n) = n^2$, il résulte de (5) que

$$f(n) = \sum_{d,d'}^{n} \varepsilon_{d'} d^2 = n^2 \sum_{d}^{n} \frac{\varepsilon_d}{d^2} \qquad (dd' = n),$$

ou, d'après la définition des ε_d,

$$f(n) = n^2 \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right),$$

p parcourant tous les facteurs premiers différents de n.

Soit Q un entier quelconque, positif ou négatif; on aura, en général, quelle que soit la fonction F, pourvu qu'elle assure la convergence des séries

$$(9) \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{m=1}^{m=\infty} \left(\frac{Q^2}{m}\right) F(m) = \sum_{d}^{Q} \varepsilon_d \sum_{n=1}^{n=\infty} F(nd), \\ (d \text{ parcourant tous les diviseurs positifs de } Q). \end{cases}$$

En effet, soit k un entier positif ayant avec Q le plus grand commun diviseur positif d_0; il figurera sous la forme nd autant de fois que d_0 a de diviseurs parmi les d et chaque fois avec le coefficient ε_d.

Or, la somme de ces coefficients ε_d où d parcourt tous les diviseurs de d_0 sera nulle à moins que $d_0 = 1$. L'égalité (9) est donc démontrée. On aura de même

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \left(\frac{Q^2}{m}\right) F(m) = \sum_{d}^{Q} \varepsilon_d \sum_{n=0}^{n=\infty} F(nd),$$

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \left(\frac{Q^2}{m}\right) F(m) = \sum_{d}^{Q} \varepsilon_d \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} F(nd)$$

et

$$(10) \quad \sum_{n=\alpha}^{n=\beta} \sum_{m=1}^{m=\infty} \left(\frac{Q^2}{m}\right) F(m, n) = \sum_{d}^{Q} \varepsilon_d \sum_{n=\alpha}^{n=\beta} \sum_{p=1}^{p=\infty} F(pd, n),$$

la sommation relative à n ne jouant aucun rôle dans la dernière transformation.

Si la fonction $F(m)$ de (9) jouit de la propriété

$$F(nd) = F(n) F(d).$$

quels que soient les entiers n et d, on aura

$$(11)\quad \sum_{m=1}^{m=\infty}\left(\frac{Q^2}{m}\right)F(m)=\sum_{d}^{Q}\varepsilon_d F(d)\sum_{n=1}^{n=\infty}F(n)=\prod_{q}^{Q}[1-F(q)]\sum_{n=1}^{n=\infty}F(n),$$

q parcourant les facteurs premiers différents de Q. Ainsi, en posant

$$H_\rho(D)=\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{D}{k}\right)\frac{1}{k^{1+\rho}},\quad H_0(D)=H(D)=\lim_{\rho=0}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{D}{k}\right)\frac{1}{k^{1+\rho}}=\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{D}{k}\right)\frac{1}{k}\quad(\S\ 14),$$

$$-\left[\frac{\partial H_\rho(D)}{\partial\rho}\right]_{\rho=0}=\overline{H}(D)=\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{D}{k}\right)\frac{\log k}{k}.$$

on aura

$$H_\rho(DQ^2)=\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{DQ^2}{k}\right)\frac{1}{k^{1+\rho}}=\sum_{d}^{Q}\varepsilon_d\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{D}{kd}\right)\frac{1}{(kd)^{1+\rho}}$$

$$=\prod_{q}^{Q}\left[1-\left(\frac{D}{q}\right)\frac{1}{q^{1+\rho}}\right]\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{D}{k}\right)\frac{1}{k^{1+\rho}}$$

$$=\prod_{q}^{Q}\left[1-\left(\frac{D}{q}\right)\frac{1}{q^{1+\rho}}\right]H_\rho(D),$$

$$(12)\qquad H(DQ^2)=\prod_{q}^{Q}\left[1-\left(\frac{D}{q}\right)\frac{1}{q}\right]H(D),$$

$$\frac{\partial H_\rho(DQ^2)}{\partial\rho}=\prod_{q}^{Q}\left[1-\left(\frac{D}{q}\right)\frac{1}{q^{1+\rho}}\right]\left[\sum_{q}^{Q}\left(\frac{D}{q}\right)\frac{\log q}{q^{1+\rho}-\left(\frac{D}{q}\right)}H_\rho(D)+\frac{\partial H_\rho(D)}{\partial\rho}\right],$$

$$-\overline{H}(DQ^2)=\prod_{q}^{Q}\left[1-\left(\frac{D}{q}\right)\frac{1}{q}\right]\left[\sum_{q}^{Q}\left(\frac{D}{q}\right)\frac{\log q}{q-\left(\frac{D}{q}\right)}H(D)-\overline{H}(D)\right].$$

Si D est un discriminant, on voit qu'on est ramené pour le calcul de la fonction H, quand l'argument est un discriminant quelconque, au cas où cet argument est un discriminant fondamental. Or, nous avons trouvé (§ 5)

$$\frac{1}{(\sqrt{D_0})}\sum_{k=1}^{k=|D_0|-1}\left(\frac{D_0}{k}\right)e^{\frac{2nk\pi i}{|D_0|}}=\left(\frac{D_0}{n}\right)\qquad(n\text{ entier}>0)\ (^1);$$

---

(1) On peut toujours supprimer le terme où $k=|D_0|$, qui est nul.

donc

$$\mathrm{H}(\mathrm{D}_0) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{\mathrm{D}_0}{n}\right)\frac{1}{n} = \frac{1}{(\sqrt{\mathrm{D}_0})} \sum_{k=1}^{k=|\mathrm{D}_0|-1} \left(\frac{\mathrm{D}_0}{k}\right) \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{e^{\frac{2nk\pi i}{|\mathrm{D}_0|}}}{n}.$$

La dernière série étant le développement (¹) de

$$-\log\left(1 - e^{\frac{2k\pi i}{|\mathrm{D}_0|}}\right),$$

on a

(13) $$\mathrm{H}(\mathrm{D}_0) = \frac{-1}{(\sqrt{\mathrm{D}_0})} \sum_{k=1}^{k=|\mathrm{D}_0|-1} \left(\frac{\mathrm{D}_0}{k}\right) \log\left(1 - e^{\frac{2k\pi i}{|\mathrm{D}_0|}}\right).$$

On peut simplifier cette expression, en distinguant les deux cas $\mathrm{D}_0 < 0$, $\mathrm{D}_0 > 0$, si l'on remarque que $\mathrm{H}(\mathrm{D}_0)$ est réel. On a, en effet,

$$\log\left(1 - e^{\frac{2k\pi i}{|\mathrm{D}_0|}}\right) = \frac{1}{2}\log\left[\left(1 - \cos\frac{2k\pi}{|\mathrm{D}_0|}\right)^2 + \sin^2\frac{2k\pi}{|\mathrm{D}_0|}\right] + i \operatorname{arc\,tang} \frac{\cos\frac{k\pi}{|\mathrm{D}_0|}}{\sin\frac{k\pi}{|\mathrm{D}_0|}}$$
$$= \log 2 \sin\frac{k\pi}{|\mathrm{D}_0|} + i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{|\mathrm{D}_0|}\right).$$

Donc

$$\mathrm{D}_0 > 0, \qquad \mathrm{H}(\mathrm{D}_0) = \frac{-1}{|\sqrt{\mathrm{D}_0}|} \sum_{k=1}^{k=|\mathrm{D}_0|-1} \left(\frac{\mathrm{D}_0}{k}\right)\left[\log \sin\frac{k\pi}{|\mathrm{D}_0|} + \log 2\right],$$

et comme

$$\sum_{k=1}^{k=|\mathrm{D}_0|-1} \left(\frac{\mathrm{D}_0}{k}\right) = 0 \qquad [\S\ 3, (21)],$$

(14) $$\mathrm{D}_0 > 0. \qquad \mathrm{H}(\mathrm{D}_0) = \frac{-1}{|\sqrt{\mathrm{D}_0}|} \sum_{k=1}^{k=|\mathrm{D}_0|-1} \left(\frac{\mathrm{D}_0}{k}\right) \log \sin\frac{k\pi}{|\mathrm{D}_0|},$$

(¹) Le développement usuel de $\log(1-z)$ en série de Taylor converge en tous les points A du cercle $|z| = 1$, sauf au point $z = 1$, et est la limite des valeurs que prend la détermination de $\log(1-z)$ qui s'annule avec z quand z s'approche de A sur une courbe qui n'est pas tangente en A au cercle de convergence (voir le *Traité d'Analyse* de M. Picard, t. II, p. 73). Comme la série entière qui représente $\log(1-z)$ est continue sur le cercle de convergence, sauf au point $z = 1$, la dernière restriction, nécessaire pour le cas des séries entières les plus générales, ne l'est plus ici, sauf peut-être pour $z = 1$.

de même

$$(15) \qquad D_0 < 0, \qquad H(D_0) = \frac{\pi}{|D_0|^{\frac{3}{2}}} \sum_{k=1}^{k=|D_0|-1} \left(\frac{D_0}{k}\right) k.$$

Ainsi, quand $D_0 > 0$,

$$\sum_{k=1}^{k=|D_0|-1} \left(\frac{D_0}{k}\right) k = 0,$$

et, quand $D_0 < 0$,

$$\sum_{k=1}^{k=|D_0|-1} \left(\frac{D_0}{k}\right) \log \sin \frac{k\pi}{|D_0|} = 0.$$

Si dans la formule (12) on fait $D = 1$, il vient

$$H(Q^2) = \infty.$$

Mais les formules précédentes donnent

$$\lim_{\rho=0} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{Q^2}{m}\right) \frac{1}{k^{1+\rho}} = \lim_{\rho=0} \prod_q^Q \left(1 - \frac{1}{q^{1+\rho}}\right) \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^{1+\rho}},$$

et, comme on verra (§ 23) que

$$\lim_{\rho=0} \left(\frac{1}{\rho} - \sum_1^\infty \frac{1}{k^{1+\rho}}\right) = -\Gamma'(1), \qquad \text{donc} \qquad \lim_{\rho=0} \rho \sum_1^\infty \frac{1}{k^{1+\rho}} = 1,$$

il vient

$$(16) \qquad \lim_{\rho=0} \rho \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{Q_2}{k}\right) \frac{1}{k^{1+\rho}} = \frac{\varphi(Q)}{Q},$$

$\varphi(Q)$ étant le nombre des entiers $< Q$ et premiers à Q.

La formule (10) est aussi susceptible d'une application intéressante. Soient a, b, c des grandeurs quelconques et F une fonction jouissant de la propriété $F(xy) = F(x)F(y)$, on aura, d parcourant les diviseurs positifs de Q,

$$(17) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{m,n} \left(\frac{Q^2}{m}\right) F(am^2 + bmn + cn^2) \\ &\quad = \sum_d^Q \varepsilon_d \sum_{m,n} F(ad^2m^2 + bdmn + cn^2) \\ &\quad = \sum_d^Q \varepsilon_d \sum_{m,n} F(d) F\left(adm^2 + bmn + \frac{c}{d} n^2\right), \\ &(m,\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\ \pm \infty, \quad \text{sauf} \quad m = n = 0) \end{aligned} \right.$$

et, si $\sum\limits_{m,n} F(am^2 + bmn + cn^2)$ ne dépend que du discriminant de la forme $am^2 + bmn + cn^2$,

$$\sum_{m,n} \left(\frac{Q^2}{m}\right) F(am^2 + bmn + cn^2)$$
$$= \prod_q^Q [1 - F(q)] \sum_{m,n} F\left(adm^2 + bmn + \frac{c}{d} n^2\right).$$

Cette condition étant vérifiée pour

$$\lim_{\rho=0} \rho \sum_{m,n} (am^2 + bmn + cn^2)^{-1-\rho}$$

(*voir* le paragraphe suivant), on aura

$$(18) \quad \begin{cases} \lim\limits_{\rho=0} \rho \sum\limits_{m,n} \left(\dfrac{Q^2}{m}\right)(am^2 + bmn + cn^2)^{-1-\rho} \\ \quad = \dfrac{\varphi(Q)}{Q} \lim\limits_{\rho=0} \rho \sum\limits_{m,n} \left(adm^2 + bmn + \dfrac{c}{d} n^2\right)^{-1-\rho}. \end{cases}$$

Supposons a, b, c entiers, premiers entre eux et, de plus, $a > 0$ premier à $D = b^2 - 4ac = D_0 Q^2$ (D_0 étant le discriminant fondamental) ou seulement à Q, $b \equiv 0 \pmod{Q}$, $c \equiv 0 \pmod{Q^2}$ et écrivons, d'après (17),

$$\sum_{a,b,c} \sum_{m,n} \left(\frac{Q^2}{m}\right) F(am^2 + bmn + cn^2)$$
$$= \sum_d^Q \sum_{a,b,c} \sum_{m,n} \varepsilon_d \, F\left[d\left(adm^2 + bmn + \frac{c}{d} n^2\right)\right].$$

La forme $\left(ad, b, \frac{c}{d}\right)$ d'ordre d est composée des deux formes

$$(a, b, c), \quad \left(d, b, \frac{ac}{d}\right),$$

et, pour chaque valeur de d, les formes $\left(d, b, \frac{ac}{d}\right)$ correspondant aux diverses valeurs de a, b, c étant toutes parallèles, d'après une remarque faite au § 9, appartiennent à la même classe.

Donc, quand (a, b, c) parcourt un système de représentants de l'ordre primitif pour le discriminant D, $\left(ad, b, \frac{c}{d}\right)$ parcourt $\frac{K(D)}{K\left(\frac{D}{d^2}\right)}$ fois un système de représentants de l'ordre d pour le même discriminant et, par suite, $\left(a, \frac{b}{d}, \frac{c}{d^2}\right)$ parcourt $\frac{K(D)}{K\left(\frac{D}{d^2}\right)}$ fois un système de représentants de l'ordre primitif pour le discriminant $\frac{D}{d^2}$.

Ainsi ([1])

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{K(D)}\sum_{a,b,c}\sum_{m,n}\left(\frac{Q^2}{m}\right)F(am^2+bmn+cn^2)\\ &=\sum_{d}^{Q}\varepsilon_d\sum_{a,\frac{b}{d},\frac{c}{d^2}}\sum_{m,n}\frac{F\left[d^2\left(am^2+\frac{b}{d}mn+\frac{c}{d^2}n^2\right)\right]}{K\left(\frac{D}{d^2}\right)}.\end{aligned}\right.$$

§ 17. Calcul de $\lim\limits_{\rho=0}\rho\sum\limits_{m,n}(am^2+bmn+cn^2)^{-1-\rho}$. Nombre des classes.

Lemme ([2]). — Considérons la série

$$(1)\qquad S=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{u_n^{1+\rho}},$$

où les u_n sont positifs et $u_n \leqq u_{n+1}$. Soit $f(t)$ le nombre des $u_n \leqq t$. Si, pour $t=\infty$, on a

$$(2)\qquad \lim_{t=\infty}\frac{f(t)}{t}=\omega \qquad (\omega \text{ fini} > 0),$$

([1]) Comparer l'analyse plus compliquée de Kronecker (*Sitzungsberichte*, p. 256, 1889) qui recourt aux *formes contenues* de R. Lipschitz [*Einige Sätze aus der Theorie der quadratischen Formen* (*Journal de Crelle*, t. 53)].

([2]) DIRICHLET, *Recherches sur quelques applications de l'Analyse infinitésimale à la théorie des nombres*, § 1 (*Journal de Crelle*, t. 19). — DIRICHLET, *Sur un théorème relatif aux séries* (*ibid.*, t. 53). — DIRICHLET, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, §§ 118, 119.

on aura aussi

$$\lim_{\rho=0} \rho S = \omega$$

(si le nombre des termes de S était fini, ω serait nul et le théorème évident).

Remarquons d'abord que $f(t)$ est fini pour chaque valeur finie de t, sans quoi il resterait toujours infini à partir du point où il a commencé de l'être et l'on ne pourrait avoir (2). De là résulte que les u_n doivent croître avec n au delà de toute limite.

Par hypothèse, on peut trouver τ tel que pour $t > \tau$ on ait

$$(3) \qquad \omega - \varepsilon < \frac{f(t)}{t} < \omega + \varepsilon,$$

ε étant d'une petitesse arbitraire. Soit $f(\tau) = i$; on aura

$$u_i \leqq \tau < u_{i+1}.$$

Parmi les valeurs de u_n *supérieures à* u_{i+1} (il y en a certainement) considérons la dernière u_{k-1} d'une suite de valeurs égales et soit

$$u_{k-1} < u_k = u_{k+1} = \ldots = u_h < u_{h+1}.$$

Quant t croît de u_{k-1} à u_k, il s'approche d'abord de u_k; $f(t)$ reste alors égal à $k-1$ et, par conséquent, $\frac{f(t)}{t}$ s'approche indéfiniment de $\frac{k-1}{u_k}$, donc reste $< \frac{k}{u_k}$. Au moment où $t = u_k$, $f(t) = h > k$ et l'on a

$$\frac{f(t)}{t} \geqq \frac{k}{u_k}.$$

Donc, d'après (3),

$$\omega - \varepsilon < \frac{k}{u_k} < \omega + \varepsilon.$$

Donc $\frac{k}{u_k}$ a pour limite ω.

Écrivons alors (1) sous la forme

$$S = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\left(\frac{k}{u_k}\right)^{1+\rho}}{k^{1+\rho}}$$

et considérons

$$S' = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^{1+\rho}}.$$

Soient S_n, S'_n les sommes des n premiers termes de S, S′ et

$$S = S_n + R,$$
$$S' = S'_n + R'.$$

Pour $\rho > 0$ S′ converge donc aussi S, puisque les $\left(\frac{k}{u_k}\right)^{1+\rho}$ sont tous finis. De plus on peut prendre n assez grand pour que dans R les $\frac{k}{u_k}$ soient tous compris entre $\omega - \varepsilon$ et $\omega + \varepsilon$. Alors

$$(\omega - \varepsilon)^{1+\rho} R' < R < (\omega + \varepsilon)^{1+\rho} R'.$$

Quand ρ tend vers zéro, $\rho S'$ tend vers 1 (§§ 14, 23); ρS_n, $\rho S'_n$ tendent vers zéro. Il reste

$$\lim_{\rho=0} \rho S = \lim_{\rho=0} \rho R,$$
$$1 = \lim_{\rho=0} \rho S' = \lim_{\rho=0} \rho R',$$

et comme

$$\lim_{\rho=0} (\omega - \varepsilon)^{1+\rho} \rho R' < \lim_{\rho=0} \rho R < \lim_{\rho=0} (\omega + \varepsilon)^{1+\rho} \rho R',$$
$$\omega - \varepsilon < \lim_{\rho=0} \rho R < \omega + \varepsilon,$$

on a enfin

$$\omega - \varepsilon < \lim_{\rho=0} \rho S < \omega + \varepsilon,$$

ce qui démontre le théorème.

Tout ce qui précède s'applique au cas où S serait une série multiple. Il suffit alors de ranger les termes en série simple d'après une loi quelconque, telle seulement que l'un d'eux ne soit jamais inférieur au précédent.

Cherchons d'après cela la valeur de

$$A = \lim_{\rho=0} \rho \sum_{m,n} (am^2 + bmn + cn^2)^{-1-\rho},$$

a, b, c étant des grandeurs réelles quelconques, mais a positif, $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, +\infty$ sauf $m = n = 0$ si $D = b^2 - 4ac < 0$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty$, $n = 1, 2, \ldots, \infty$, et

$$2a\frac{m}{n} + b \geq \frac{T}{U}, \qquad \left(0 < \frac{T}{U} < |\sqrt{D}|, \ \frac{T}{U} \text{ d'ailleurs quelconque}\right),$$

si D est > 0. Ainsi $am^2 + bmn + cn^2$ est positif dans tous les

termes de la série. Ici $f(t)$ est le nombre des quantités

$$am^2 + bmn + cn^2$$

qui sont $\leqq t$, c'est-à-dire pour lesquelles on a, en posant

$$\frac{m}{|\sqrt{t}|} = x, \qquad \frac{n}{|\sqrt{t}|} = y,$$

si $D < 0$

$$ax^2 + bxy + cy^2 \leqq 1,$$

si $D > 0$

$$ax^2 + bxy + cy^2 \leqq 1, \qquad 2a\frac{x}{y} + b \geqq \frac{T}{U}, \qquad y > 0.$$

Si l'on regarde x, y comme des coordonnées cartésiennes, les points (x, y) seront les points de croisement de parallèles aux axes distantes de $\frac{1}{\sqrt{t}} = \varepsilon$. Le plan est ainsi partagé en carrés d'aire ε^2 et $f(t)$ est le nombre de ces carrés contenus
si $D < 0$, dans l'ellipse $ax^2 + bxy + cy^2 = 1$,
si $D > 0$, entre l'hyperbole $ax^2 + bxy + cy^2 = 1$, l'axe des x et la demi-droite $2a\frac{x}{y} + b = \frac{T}{U}$ qui passe par l'origine, et est comprise entre l'asymptote et l'axe des x, car on a

$$y > 0 \qquad \text{et} \qquad ax^2 + bxy + cy^2 > 0.$$

Donc la quantité

$$\lim_{t=\infty} \frac{f(t)}{t} = \lim_{t=\infty} \varepsilon^2 f(t)$$

est l'intégrale

$$A = \frac{1}{2}\int r^2\, d\theta \qquad (x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta),$$

étendue aux aires précédentes. Ici on a

$$r^2 = \frac{1}{a\cos^2\theta + b\sin\theta\cos\theta + c\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{4a}{(2a\cot\theta + b)^2 - D},$$

et, en posant $2a\cot\theta + b = z$,

$$D < 0, \qquad A = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{z^2 - D} = \frac{2\pi}{|\sqrt{D}|},$$

$$D > 0, \qquad A = \int_0^{\frac{T}{U}} \frac{dz}{z^2 - D} = \frac{1}{2|\sqrt{D}|}\log\frac{T + U\sqrt{D}}{T - U\sqrt{D}}.$$

Ainsi A ne dépend que du discriminant D. Si a, b, c sont entiers, et T, U les plus petites solutions positives de $T^2 - DU^2 = 4$, on pourra écrire

$$D < 0, \qquad A = \frac{2\pi i}{\tau} \frac{\tau}{i|\sqrt{D}|} = \frac{\tau}{i|\sqrt{D}|} \log E(D),$$

$$D > 0, \qquad A = \frac{\tau}{|\sqrt{D}|} \log E(D), \quad \text{car} \quad \tau = 1, \quad \text{si} \quad D > 0,$$

ou, en une seule formule,

$$(4) \qquad A = \frac{\tau}{(\sqrt{D})} \log E(D) \qquad (D > 0 \text{ et } D < 0).$$

L'équation de Dirichlet, jointe aux formules (12), (16), (18) du paragraphe précédent, donne maintenant

$$(5) \qquad \tau H(D) = K(D) A,$$

K(D) étant le nombre des classes primitives de discriminant D. Donc

$$(6) \qquad H(D) = \frac{K(D)}{(\sqrt{D})} \log E(D), \qquad (D > 0 \text{ ou } D < 0)$$

et, en distinguant les deux cas,

$$(7) \qquad \begin{cases} D < 0, & \tau H(D) = \dfrac{2\pi}{|\sqrt{D}|} K(D), \\ D > 0, & H(D) = \dfrac{K(D)}{2|\sqrt{D}|} \log \dfrac{T + U\sqrt{D}}{T - U\sqrt{D}}. \end{cases}$$

La formule (12) du paragraphe précédent donnant encore

$$H(D) = H(D_0) \prod_q^Q \left[1 - \left(\frac{D_0}{q}\right) \frac{1}{q} \right],$$

on conclut

$$(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{K(D)}{K(D_0)} = Q \displaystyle\prod_q^Q \left[1 - \left(\frac{D_0}{q}\right) \frac{1}{q} \right] \frac{\log E(D_0)}{\log E(D)} \\ (q \text{ parcourant les facteurs premiers différents de } Q). \end{cases}$$

On est donc ramené à calculer $K(D_0)$. Les formules (13), (14), (15) du paragraphe précédent jointes à (6) donnent

$$(9) \quad K(D_0)\log E(D_0) = (\sqrt{D_0})\,H(D_0) = -\sum_{k=1}^{k=|D_0|}\left(\frac{D_0}{k}\right)\log\left(1 - e^{\frac{2k\pi i}{|D_0|}}\right),$$

où le terme nul correspondant à $k = D_0$ est rétabli pour simplifier la notation.

En distinguant les deux cas, on obtient

$$(10) \qquad D_0 < 0, \qquad K(D_0) = \frac{\tau}{2D_0}\sum_{k=1}^{k=|D_0|}\left(\frac{D_0}{k}\right)k,$$

$$(11) \qquad D_0 > 0, \qquad K(D_0) = \frac{-1}{\log E(D_0)}\sum_{k=1}^{k=|D_0|}\left(\frac{D_0}{k}\right)\log\sin\frac{k\pi}{|D_0|}.$$

Dirichlet, dans son travail fondamental [1], avait dû distinguer huit cas. Kronecker, qui n'indique pas ses procédés, en distingue encore deux : il donne la formule (10) pour $D_0 < 0$ et la formule (9) pour $D_0 > 0$ [2]. C'est l'application de son élégante formule

$$\left(\frac{D_0}{h}\right) = \sum_{k=1}^{k=|D_0|}\left(\frac{D_0}{k}\right)e^{\frac{2hk\pi i}{|D_0|}} \qquad (h > 0),$$

qui a permis de calculer si simplement $H(D_0)$ et d'obtenir deux formules en une seule à membres complexes. De (9) on tire

$$(12) \qquad E(D_0)^{K(D_0)} = \prod_{k=1}^{k=|D_0|}\left(1 - e^{\frac{2k\pi i}{|D_0|}}\right)^{-\left(\frac{D_0}{k}\right)},$$

relation remarquable entre l'unité fondamentale $E(D_0)$ et les

---

(1) *Recherches sur quelques applications*, etc. (*Journal de Crelle*, t. 21, p. 151).
(2) *Sitzungsberichte*, p. 772; 1885.

fonctions circulaires (¹), qui donne en distinguant les deux cas

$$D_0 < 0, \qquad e^{\frac{2i\pi}{\tau}K(D_0)} = \prod_{k=1}^{k=|D_0|}\left(1 - e^{\frac{2k\pi i}{|D_0|}}\right)^{-\left(\frac{D_0}{k}\right)} = \frac{\prod_n\left(1 - e^{\frac{2n\pi i}{|D_0|}}\right)}{\prod_r\left(1 - e^{\frac{2r\pi i}{|D_0|}}\right)},$$

$$D_0 > 0, \quad \left(\frac{T + U\sqrt{D_0}}{2}\right)^{K(D_0)} = \prod_{k=1}^{k=|D_0|}\left(\sin\frac{k\pi}{D_0}\right)^{-\left(\frac{D_0}{k}\right)} = \frac{\prod_n \sin\frac{n\pi}{D_0}}{\prod_r \sin\frac{r\pi}{D_0}},$$

r parcourant les nombres pour lesquels $\left(\frac{D_0}{r}\right) = +1$,

n parcourant les nombres pour lesquels $\left(\frac{D_0}{n}\right) = -1$.

Si $D_0 \equiv 0 \pmod 8$, $\pm D_0$ a la forme de discriminant fondamental; en écrivant alors la formule (12) pour D_0 et pour $-D_0$, et en divisant membre à membre on obtient

$$\frac{E(D_0)^{K(D_0)}}{E(-D_0)^{K(-D_0)}} = \prod_k\left(1 - e^{\frac{2k\pi i}{|D_0|}}\right)^{-2\left(\frac{D_0}{k}\right)}, \qquad D_0 > 0 \quad \text{et} \quad \equiv 0 \pmod 8),$$

$$(k = 3,\ 7,\ 11,\ \ldots,\ 4n-1,\ \ldots,\ |D_0|-1)$$

relation qui s'étend facilement au cas des discriminants D_0Q^2 à l'aide de la formule (8).

Si, dans l'équation (19) du paragraphe précédent, on prend F définie par $F(u) = \frac{\rho}{u^{1+\rho}}$, on obtient

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\rho}{K(D)}\sum_{a,b,c}\sum_{m,n}\left(\frac{Q^2}{m}\right)(am^2 + bmn + cn)^{-1-\rho} \\ &= \sum_d^{Q}\varepsilon_d \sum_{a,\frac{b}{d},\frac{c}{d^2}}\sum_{m,n}\frac{\rho}{d^{2(1+\rho)}}\frac{\left(am^2 + \frac{b}{d}mn + \frac{c}{d^2}n^2\right)^{-1-\rho}}{K\left(\frac{D}{d^2}\right)} \end{aligned}\right.$$

(d parcourant tous les diviseurs de Q).

(¹) Comparer DIRICHLET, *Résolution de l'équation de Pell par les fonctions circulaires* (*Journal de Crelle*, t. 21).

Si l'on suppose $D < 0$, on en tire, en passant à la limite pour $\rho = 0$, d'après (5),

$$\tau_D \frac{H(D)}{K(D)} \frac{\varphi(Q)}{Q} = \sum_d^Q \frac{\varepsilon_d}{d^2} \tau_{\frac{D}{d^2}} \frac{H\left(\frac{D}{d^2}\right)}{K\left(\frac{D}{d^2}\right)}, \quad D < 0$$

(τ_n est le nombre des solutions de $t^2 - nu^2 = 4$),

ou

$$\tau_{D_0 Q^2} \frac{H(D_0 Q^2)}{K(D_0 Q^2)} \frac{\varphi(Q)}{Q} = \sum_{d,d'}^Q \frac{\varepsilon_d}{d^2} \frac{H(D_0 d'^2)}{K(D_0 d'^2)} \tau_{D_0 d'^2} \qquad (dd' = Q),$$

d'où, par la formule (4) du § 16,

$$\tau_{D_0 Q^2} \frac{H(D_0 Q^2)}{K(D_0 Q^2)} = \sum_{d,d'}^Q \frac{H(D_0 d^2)}{K(D_0 d^2)} \frac{\varphi(d)}{dd'^2} \tau_{D_0 d^2}$$

$$= Q^{-1} \sum_{d,d'}^Q \tau_{D_0 d^2} \frac{\varphi(d)}{d'} \frac{H(D_0 d^2)}{K(D_0 d^2)} \qquad (dd' = Q);$$

si $D_0 < -4$ tous les τ, égaux à 2, disparaissent.

Quand $D > 0$, m et n sont assujettis dans (13) à

$$2a \frac{m}{n} + b \gtreqless \frac{T}{U}, \qquad n > 0,$$

et l'on ne peut plus faire la même transformation; car il faudrait que dans chacune des sommes $\sum_{a, \frac{b}{d^1}, \frac{c}{d^2}}$, m, n fussent soumis aux conditions

$$2a \frac{m}{n} + \frac{b}{d} \gtreqless \frac{T}{Ud}, \qquad n > 0,$$

qui dépendent de d.

§ 18. Généralisation de l'équation de Dirichlet.

On a trouvé au § 15 la formule

(1)
$$\tau \sum_{h,k} \left(\frac{Q^2}{h}\right)\left(\frac{D}{k}\right) F(hk) = \sum_{a,b,c} \sum_{m,n} \left(\frac{Q^2}{m}\right) F(am^2 + bmn + cn^2),$$

$h, k = 1, 2, \ldots, +\infty$;

si $D < 0$, $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty$, sauf $m = n = 0$;

si $D > 0$, il faut imposer en outre à m, n les conditions $2a\frac{m}{n} + b \geqq \frac{T}{U}$, $n > 0$, T, U étant les plus petites solutions positives de $T^2 - DU^2 = 4$;

$\sum\limits_{a,b,c}$ s'étend à tous les représentants (a, b, c) des classes primitives de discriminant $D = D_0 Q^2$, D_0 étant le discriminant fondamental; a est positif, premier à Q; b et c sont divisibles par tous les facteurs premiers de Q;

$\tau = 1$ pour $D > 0$, $\tau = 2$ pour $D < -4$, $\tau = 6$ pour $D = -3$, $\tau = 4$ pour $D = -4$.

Supposons que, dans chaque classe, on choisisse un représentant (a, b, c) normal ou binormal, satisfaisant par conséquent toujours aux conditions précédentes (§ 9).

Prenons alors pour $F(am^2 + bmn + cn^2)$ la fonction

$$\left(\frac{D_1}{am^2 + bmn + cn^2}\right)(am^2 + bmn + cn^2)^{-1-\rho},$$

où D_1 est un discriminant positif ou négatif diviseur normal ou binormal de D selon que (a, b, c) est normale ou binormale.

Comme, d'après les fixations précédentes (§ 15), le nombre $am^2 + bmn + cn^2$ est toujours positif, on aura (§ 4)

$$\left(\frac{D_1}{am^2 + bmn + cn^2}\right) = \left(\frac{D_1}{am^2}\right) = \left(\frac{D_1}{a}\right)\left(\frac{D_1^2}{m}\right).$$

L'équation (1) devient ainsi

(2)
$$\begin{cases} \tau \sum\limits_{h,k} \left(\frac{Q^2}{h}\right)\left(\frac{D}{k}\right)\left(\frac{D_1}{hk}\right)\frac{1}{(hk)^{1+\rho}} \\ = \sum\limits_{a,b,c}\left(\frac{D_1}{a}\right)\sum\limits_{m,n}\left(\frac{D_1^2 Q^2}{m}\right)\frac{1}{(am^2 + bmn + cn^2)^{1+\rho}}, \end{cases}$$

ou, en posant $\frac{D}{D_1} = D_2$,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\tau \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{D_1 Q^2}{k}\right) \frac{1}{k^{1+\rho}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{D_1^2 D_2}{k}\right) \frac{1}{k^{1+\rho}} \\ &= \sum_{a,b,c} \left(\frac{D_1}{a}\right) \sum_{m,n} \left(\frac{D_1^2 Q^2}{m}\right) \frac{1}{(am^2 + bmn + cn^2)^{1+\rho}}. \end{aligned}\right.$$

Il faut remarquer que D_2 a toujours la forme de discriminant : si $D \equiv 1 \pmod 4$ et par conséquent $D_1 \equiv 1 \pmod 4$, c'est évident; si $D \equiv 0 \pmod 4$, il reste toujours dans D_2 un facteur 4.

Il peut arriver que D_2 soit carré parfait, par exemple si $D_1 = D_0$. Alors $\left(\frac{D_1}{a}\right)$ qui est égal à $\left(\frac{D_2}{a}\right)$, d'après la relation $\left(\frac{D}{a}\right) = \left(\frac{D_1 D_2}{a}\right) = +1$, est aussi égal à $+1$ pour toutes les formes (a, b, c) et les deux membres de (3) sont infinis. Nous excepterons ce cas de l'analyse qui va suivre en remarquant toutefois que la formule finale (6) peut être conservée dans cette hypothèse bien qu'elle soit illusoire.

Transformons d'abord le second membre de (3). Soient $p_1, p_2, \ldots, p_s$ les facteurs premiers positifs de D_1 qui n'entrent pas dans Q et qui, par conséquent, appartiennent *exclusivement* à D_0. Que D_1 soit normal ou binormal, ils sont tous impairs : si D est impair, ou Q pair, c'est évident; si D est pair et Q impair, D_1 est impair, car, s'il est normal, $\frac{D}{4}$ qui alors $\equiv 2, 3 \pmod 4$, n'a pour diviseur aucun discriminant pair et, s'il est binormal, l'un au moins des coefficients b, c est $\equiv 2 \pmod 4$ et n'a encore pour diviseur aucun discriminant pair. Posons

$$\prod_{k=1}^{k=s} p_k = D_{01} \equiv 1 \pmod 2;$$

on aura

$$\left(\frac{D_1^2 Q^2}{m}\right) = \left(\frac{D_{01}^2}{m}\right)\left(\frac{Q^2}{m}\right).$$

$\left(\frac{D_{01}^2}{m}\right)$ s'annulant dès que m contient un des p_k, on pourra supprimer ce symbole dans (3) en convenant que m ne prendra pas les valeurs entières divisibles par un des p_k, ou mieux en intro-

duisant les quantités ε. De cette manière le second membre de (3) s'écrira [§ 16, (10)]

$$\sum_{\delta}^{D_{01}} \sum_{a,b,c} \sum_{m,n} \varepsilon_\delta \left(\frac{D_1}{a}\right) \left(\frac{Q^2}{m\delta}\right) (a\delta^2 m^2 + b\delta mn + cn^2)^{-1-\rho}$$

(δ parcourant tous les diviseurs de D_{01}),

ou, en négligeant $\left(\frac{Q^2}{\delta}\right) = +1$ (car δ est premier à Q),

(4) $$\sum_{\delta}^{D_{01}} \varepsilon_\delta \delta^{-1-\rho} \sum_{a,b,c} \sum_{m,n} \left(\frac{D_1}{a}\right) \left(\frac{Q^2}{m}\right) \left(a\delta m^2 + bmn + \frac{c}{\delta} n^2\right)^{-1-\rho}.$$

La forme $\left(a\delta, b, \frac{c}{\delta}\right)$ résulte de la composition de (a, b, c) avec $\left(\delta, \lambda D, \frac{\lambda^2 D^2 - D}{4\delta}\right)$ [1], [$\lambda = 0$, si $D \equiv 0 \pmod 4$; $\lambda = 1$, si $D \equiv 1 \pmod 4$]. $\frac{D}{\delta}$ étant premier à δ, cette seconde composante est primitive. Ainsi $\left(a\delta, b, \frac{c}{\delta}\right)$ est primitive (ce qui était évident *a priori* puisque le facteur δ, simple dans $D = b^2 - 4ac$, l'est aussi dans c) et elle parcourt avec (a, b, c) un système complet de représentants de l'ordre primitif.

Les relations $D = D_1 D_2$, $D = b^2 - 4ac$ donnent ensuite

$$\left(\frac{D}{a}\right) = +1, \qquad \left(\frac{D_1}{a}\right) = \left(\frac{D_2}{a}\right) = \left(\frac{D_2}{a\delta}\right)\left(\frac{D_2}{\delta}\right),$$

car aucun des p_k ne divise D_2.

Enfin on peut remplacer $\left(a\delta, b, \frac{c}{\delta}\right)$ par une forme équivalente (a', b', c') satisfaisant aux mêmes conditions que (a, b, c). On aura alors une égalité de la forme

$$a\delta = a'\alpha^2 + b'\alpha\gamma + c'\gamma^2,$$

---

(1) Si $D \equiv 1 \pmod 4$, on a

$$b = 0 \pmod D \equiv D \pmod D \equiv D \pmod{2\delta},$$

puisque δ est impair et $b - D$ pair. Si $D \equiv 0 \pmod 4$, b est toujours pair et divisible par les facteurs impairs de D; donc encore

$$b \equiv 0 \pmod{2\delta}.$$

où le second membre est positif comme $a\delta$ et où α^2 est nécessairement divisible par δ, mais ne l'est par aucun autre facteur de D. Donc

$$\left(\frac{D_2}{a\delta}\right) = \left(\frac{D_2}{a'\alpha^2}\right) = \left(\frac{D_2}{a'}\right) = \left(\frac{D_1}{a'}\right).$$

L'expression (4) devient ainsi

$$\sum_{\delta}^{D_{01}} \varepsilon_\delta \left(\frac{D^2}{\delta}\right) \delta^{-1-\rho} \sum_{a',b',c'} \sum_{m,n} \left(\frac{D_1}{a'}\right) \left(\frac{Q^2}{m}\right) (a'm^2 + b'mn + cn^2)^{-1-\rho},$$

ou, d'après la définition des ε (§ 16), en effaçant les accents,

$$\prod_{i=1}^{i=s} \left[1 - \left(\frac{D_2}{p_i}\right) p_i^{-1-\rho}\right] \sum_{a,b,c} \sum_{m,n} \left(\frac{D_1}{a}\right) \left(\frac{Q^2}{m}\right) (am^2 + bmn + cn^2)^{-1-\rho}.$$

Transformons maintenant la série

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{D_1^2 D_2}{k}\right) \frac{1}{k^{1+\rho}}$$

qui figure au premier membre de (3). Elle devient, si l'on ajoute à $D_1^2 D_2 = DD_1$ le facteur Q^2 qui n'apporte aucun diviseur premier nouveau,

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{D_1^2}{k}\right) \left(\frac{D_2 Q^2}{k}\right) \frac{1}{k^{1+\rho}},$$

ou, comme tout à l'heure,

$$\sum_{\delta}^{D_{01}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \varepsilon_\delta \left(\frac{D_2 Q^2}{k\delta}\right) \frac{1}{(k\delta)^{1+\rho}},$$

c'est-à-dire, puisque $\left(\frac{Q^2}{\delta}\right) = 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{\delta}^{D_{01}} \varepsilon_\delta \left(\frac{D_2}{\delta}\right) \frac{1}{\delta^{1+\rho}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{D_2 Q^2}{k}\right) \frac{1}{k^{1+\rho}} \\ = \prod_{=1}^{i=s} \left[1 - \left(\frac{D_2}{p_i}\right) p^{-1-\rho}\right] \sum_{k=}^{k=\infty} \left(\frac{D_2 Q^2}{k}\right) \frac{1}{k^{1+\rho}}.\end{aligned}$$

On a ainsi, au lieu de (3),

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\tau\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{D_1Q^2}{k}\right)\frac{1}{k^{1+\rho}}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{D_2Q^2}{k}\right)\frac{1}{k^{1+\rho}}\\ &\quad=\tau\,H_\rho(D_1Q^2)\,H_\rho(D_2Q^2)\\ &\quad=\sum_{a,b,c}\left(\frac{D_1}{a}\right)\sum_{m,n}\left(\frac{Q^2}{m}\right)\frac{1}{(am^2+bmn+cn^2)^{1+\rho}}.\end{aligned}\right.$$

La dernière série ne change pas de valeur si l'on remplace (a, b, c) par une forme équivalente satisfaisant seulement aux conditions énoncées dans (1); le dénominateur symbolique de $\left(\frac{D_1}{a}\right)$ est alors un nombre quelconque premier à $2D$ et représentable par (a, b, c) que nous désignerons par A. De plus, la formule peut être conservée quand D_2 est un carré et, par conséquent, quand $D_1 = D$. Donc, en généralisant comme pour l'équation de Dirichlet, et en remplaçant pour la symétrie $\left(\frac{D_1}{A}\right)$ par

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{D_1}{A}\right)+\left(\frac{D_2}{A}\right)\right],$$

(6)

$$\tau\sum_{h=1}^{h=\infty}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{D_1Q^2}{h}\right)\left(\frac{D_2Q^2}{k}\right)F(hk)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{a,b,c}\left[\left(\frac{D_1}{A}\right)+\left(\frac{D_2}{A}\right)\right]\sum_{m,n}\left(\frac{Q^2}{m}\right)F(am^2+bmn+cn^2),$$

$h, k = 1, 2, \ldots, +\infty$;

$m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty$,

sauf $m = n = 0$, si $D < 0$,

avec $2a\frac{m}{n} + b \gtrless \frac{U}{T}$, $n > 0$, si $D > 0$;

$\sum_{a,b,c}$ s'étend à un système de représentants (a, b, c) des classes primitives de discriminant D, où a est premier à Q, b et c divisibles par tous les facteurs premiers de Q;

$D = D_0$, $Q^2 = D_1 D_2$; D_1 est un discriminant diviseur de D; D_0 est un discriminant fondamental;

A est un nombre premier à $2D$ représentable par (a, b, c).

$\tau = 2$ pour $D < -4$, $\tau = 4$ pour $D = -4$, $\tau = 6$ pour $D = -3$, $\tau = 1$ pour $D > \tau$.

Pour $D_1 = 1$, cette équation coïncide avec l'équation (1) d'où nous sommes parti.

On peut écrire aussi

$$\tau \sum_{r_1, r_2} \left(\frac{D_1}{r_1}\right)\left(\frac{D_2}{r_2}\right) F(r_1 r_2)$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{a,b,c} \left[\left(\frac{D_1}{A}\right) + \left(\frac{D_2}{A}\right)\right] F(am^2 + bmn + cn^2),$$

la sommation s'étendant, dans le premier membre, à tous les nombres positifs r_1, r_2 premiers à Q et, dans le second, à tous les nombres m, n positifs ou négatifs pour lesquels $am^2 + bmn + cn^2$ est premier à Q, ou encore, en rappelant que

$$\lim_{\rho=0} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{D}{k}\right) \frac{1}{k^{1+\rho}} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{D}{k}\right) \frac{1}{k} = H(D) \qquad (\S\, 14),$$

et, en supposant que D_2 n'est pas un carré et que D_1 est $\neq 1$,

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\tau H(D_1 Q^2)\, H(D_2 Q^2) \\ &\quad = \lim_{\rho=0} \sum_{a,b,c} \left(\frac{D_1}{A}\right) \sum_{m,n} \left(\frac{Q^2}{m}\right) (am^2 + bmn + cn^2)^{-1-\rho}. \end{aligned} \right.$$

La formule (6) est la première formule fondamentale de Kronecker.

CHAPITRE V.

LES GENRES.

§ 19. Groupement des classes en genres. Généralités.

En changeant au besoin de signe les facteurs premiers impairs positifs d'un discriminant D, on peut faire en sorte qu'ils soient tous $\equiv +1 \pmod 4$. Je désignerai par p_i ($i = 1, 2, \ldots, \mu$) ces facteurs premiers avec leur signe ainsi déterminé. Soit donc $D = 2^k D'$, $D' \equiv 1 \pmod 2$; on aura

$$|D'| = \prod_{i=1}^{i=\mu} |p_i^{\alpha_i}|,$$

et selon que $D' \equiv +1$ ou $-1 \pmod 4$,

$$D' = +\prod_i p_i^{\alpha_i} \quad \text{ou} \quad D' = -\prod_i p_i^{\alpha_i}.$$

Supposons maintenant que n, n' soient deux nombres premiers à $2D$ et de même signe, représentables par une classe de formes primitives de discriminant D ([2]), et soit (a, b, c) une forme de cette classe (pouvant même être négative si $D < 0$). On pourra trouver α, β, γ, δ entiers tels que

$$n = a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2,$$
$$n' = a\delta^2 + b\beta\delta + c\delta^2.$$

([1]) Comparer GAUSS, *Disq.*, 229-231, DIRICHLET, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, §§ 121 et suiv., ou *Recherches sur diverses applications de l'Analyse infinitésimale à la théorie des nombres*, §§ 2, 6 (*Journal de Crelle*, t. 19; 1838).

([2]) Voir § 10 et les *Vorlesungen über Zahlentheorie* de Dirichlet, §§ 60, 64, 86, 93.

En posant

$$2a\alpha\delta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2c\gamma\delta = x,$$
$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = y,$$

et en remarquant que la substitution $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ transforme (a, b, c) en (n, x, n'), on voit que

$$x^2 - 4nn' = Dy^2,$$
(1) $$4nn' = x^2 - Dy^2;$$

donc

$$4nn' \equiv x^2 \pmod{p_i},$$
$$\left(\frac{4nn'}{p_i}\right) = 1, \qquad \left(\frac{p_i}{n}\right) = \left(\frac{p_i}{n'}\right).$$

Si $k > 0$, il sera nécessairement $\geqq 2$.

Soit $k = 2$; (1) montre que x est pair, $x = 2\xi$, et que par suite

$$nn' = \xi^2 - D'y^2.$$

Alors, si $D' \equiv -1 \pmod 4$, $nn' \equiv \xi^2 + y^2 \equiv 1 \pmod 4$ et on conclut

$$\left(\frac{-1}{n}\right) = \left(\frac{-1}{n'}\right).$$

Si $k > 2$, nn' étant impair, il faut, d'après (1), que $x = 2x'$, $x' \equiv 1 \pmod 2$; on aura ainsi

$$nn' = x'^2 - 2^{k-2}D'y^2.$$

Soit $k = 3$; $nn' = x'^2 - 2D'y^2$. Si $D' \equiv +1 \pmod 4$,

$$nn' \equiv x'^2 - 2y^2 \pmod 8,$$
$$nn' \equiv \pm 1 \pmod 8,$$
$$n \equiv \pm n' \pmod 8,$$

donc

$$\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{2}{n'}\right).$$

Si $D' \equiv -1 \pmod 4$,

$$nn' \equiv x'^2 + 2y^2 \pmod 8$$

et, selon la parité de y, ou bien

$$nn' \equiv 1 \pmod 8,$$
$$n \equiv n' \pmod 8,$$

ou bien

$$nn' \equiv 3 \pmod 8,$$
$$n \equiv 3n' \pmod 8.$$

Dans les deux cas

$$\left(\frac{-2}{n}\right) = \left(\frac{-2}{n'}\right).$$

Soit $k = 4$; $nn' = x'^2 - 4D'y^2$ donne

$$nn' \equiv 1 \pmod 4;$$

donc

$$\left(\frac{-1}{n}\right) = \left(\frac{-1}{n'}\right).$$

Soit enfin $k > 4$; $nn' = x'^2 - 2^{k-2}D'y^2$ donne

$$nn' \equiv 1 \pmod 8,$$

donc

$$\left(\frac{-1}{n}\right) = \left(\frac{-1}{n'}\right),$$

et

$$\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{2}{n'}\right).$$

D'après cela, les symboles $\left(\frac{p_i}{n}\right)$ et parfois un ou deux des symboles $\left(\frac{-1}{n}\right)$, $\left(\frac{2}{n}\right)$, $\left(\frac{-2}{n}\right)$ garderont la même valeur pour tous les nombres n premiers à $2D$ représentables par une même classe de discriminant D. Ces symboles, où n reste indéterminé, que nous désignerons par $C(n)$, par C ou par $\left(\frac{p_i}{}\right)$, $\left(\frac{-1}{}\right)$, $\left(\frac{2}{}\right)$, $\left(\frac{-2}{}\right)$ sont nommés *caractères fondamentaux* ou *indépendants* du discriminant D. Un produit quelconque de plusieurs d'entre eux sera nommé simplement un *caractère* du discriminant D.

Ainsi la forme et le nombre des caractères fondamentaux que nous venons de reconnaître dépend seulement de D. Leur nombre, en particulier, qui sera désigné par λ, varie de μ à $\mu + 2$, comme le montre le Tableau suivant :

$D = 2^k D'$, $\quad \lvert D' \rvert \equiv 1 \pmod 2 = \prod_{i=1}^{i=\mu} \lvert p_i^{\alpha_i} \rvert$.		CARACTÈRES FONDAMENTAUX.	λ.
$D \equiv 1 \pmod 4$		$\left(\frac{p_i}{n}\right)$	μ
$D \equiv 4 \pmod 8$	$D' \equiv +1 \pmod 4 = +\prod p_i^{\alpha_i}$	$\left(\frac{p_i}{n}\right)$	μ
	$D' \equiv -1 \pmod 4 = -\prod p_i^{\alpha_i}$	$\left(\frac{p_i}{n}\right)$, $\left(\frac{-1}{n}\right) = \left(\frac{-D'}{n}\right)$ (¹)	$\mu + 1$
$D \equiv 8 \pmod{16}$	$D' \equiv +1 \pmod 4 = \prod_i p_i^{\alpha_i}$	$\left(\frac{p_i}{n}\right)$, $\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{D'}{n}\right)$	$\mu + 1$
	$D' \equiv -1 \pmod 4 = -\prod_i p_i^{\alpha_i}$	$\left(\frac{p_i}{n}\right)$, $\left(\frac{-2}{n}\right) = \left(\frac{-D'}{n}\right)$	$\mu + 1$
$D \equiv 16 \pmod{32}$,		$\left(\frac{p_i}{n}\right)$, $\left(\frac{-1}{n}\right) = \left(\frac{-4}{n}\right)$	$\mu + 1$
$D \equiv 0 \pmod{32}$		$\left(\frac{p_i}{n}\right)$, $\left(\frac{-1}{n}\right) = \left(\frac{-4}{n}\right)$, $\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{8}{n}\right)$	$\mu + 2$

Si l'on suppose maintenant que n est un nombre déterminé, premier à $2D$, représentable par une classe de formes, l'ensemble des λ valeurs des caractères fondamentaux, autrement dit l'ensemble des λ *caractères de la classe*, constitue le *caractère total* de cette classe.

On réunit dans un même *genre* toutes les classes ayant même caractère total. Le *genre principal*, celui qui contient la forme principale,

$$\left(1, \lambda, \frac{\lambda^2 - D}{4}\right) \qquad [\lambda = 1, \text{ si } D \equiv 1 \pmod 4; \quad \lambda = 0, \text{ si } D \equiv 0 \pmod 4],$$

a tous ses caractères égaux à $+1$.

Chaque caractère n'ayant que deux valeurs, il y a, au plus, 2^λ genres possibles. Mais une remarque immédiate réduit ce nombre à $2^{\lambda-1}$: c'est qu'entre les λ valeurs des caractères fondamentaux dans une classe quelconque, il y a une relation nécessaire. Si, en effet, n est un nombre premier à $2D$ et proprement représentable

(¹) Cette égalité et les autres semblables seront expliquées tout à l'heure.

par une forme de discriminant D, D sera reste quadratique de n (§ 10) et l'on aura

$$(2)\qquad 1 = \left(\frac{D}{n}\right) = \left(\frac{2^k}{n}\right)\left(\frac{D'}{n}\right);$$

or on voit, en se reportant au Tableau précédent, que cette dernière expression est toujours un produit de caractères fondamentaux.

Il est avantageux pour la suite de n'avoir au numérateur symbolique des caractères que des nombres ayant la forme de discriminant et divisant D, si D est impair, $\frac{D}{4}$, si $D \equiv 0 \pmod 4$. Or, l'égalité (2) permet de remplacer les caractères $\left(\frac{-1}{n}\right)$, $\left(\frac{\pm 2}{n}\right)$ par d'autres satisfaisant à ces conditions, car elle donne :

si $k = 2$, $D' \equiv -1 \pmod 4$,

$$\left(\frac{-1}{n}\right) = \left(\frac{-D'}{n}\right),$$

si $k = 3$, $D' \equiv \pm 1 \pmod 4$,

$$\left(\frac{\pm 2}{n}\right) = \left(\frac{\pm D'}{n}\right),$$

si $k = 4$,

$$\left(\frac{-1}{n}\right) = \left(\frac{-4}{n}\right)$$

si $k \geqq 5$,

$$\left(\frac{-1}{n}\right) = \left(\frac{-4}{n}\right), \qquad \left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{8}{n}\right);$$

la même égalité (2) avec la suppression des facteurs carrés permet évidemment de remplacer un produit de caractères fondamentaux constituant un caractère quelconque par un autre, satisfaisant aux mêmes conditions.

Le groupement en genres des classes d'espèce σ de déterminant $D\sigma^2$ se fera maintenant sans difficulté. Comme les formes d'espèce σ de discriminant $D\sigma^2$ et les nombres σn représentables par elles sont en correspondance univoque avec les formes primitives de discriminant D et les nombres n représentables par ces dernières, on attribuera aux classes des premières les mêmes caractères $\left(\frac{p_i}{n}\right)$, $\left(\frac{-1}{n}\right)$, $\left(\frac{\pm 2}{n}\right)$ qu'aux classes des secondes. Ainsi

les genres, classes, formes d'ordre σ et de discriminant $D\sigma^2$ seront en correspondance univoque avec les genres, classes, formes d'ordre 1 et de discriminant D.

§ 20. Nombre des classes contenues dans un genre.

Le théorème essentiel de la théorie des genres est que les $2^{\lambda-1} = \nu$ genres reconnus possibles existent réellement et contiennent chacun le même nombre de classes.

Nous avons actuellement tout ce qu'il faut pour réduire le raisonnement de Dirichlet presque uniquement à sa conclusion. Récrivons l'équation (5) du § 18 :

$$\tau \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{D_1 Q^2}{k}\right) \frac{1}{k^{1+\rho}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{D_2 Q^2}{k}\right) \frac{1}{k^{1+\rho}}$$
$$= \sum_{a,b,c} \left(\frac{D_1}{a}\right) \sum_{m,n} \left(\frac{Q^2}{m}\right) \frac{1}{(am^2 + bmn + cn^2)^{1+\rho}},$$

et supposons que $\left(\frac{D_1}{a}\right)$ soit un des caractères de la classe de (a, b, c), a étant premier à $2D$. Multiplions par ρ les deux membres et passons à la limite pour $\rho = 0$. On aura, en désignant par L la quantité

$$\lim_{\rho=0} \rho \sum_{m,n} \left(\frac{Q^2}{m}\right) \frac{1}{(am^2 + bmn + cn^2)^{1+\rho}},$$

que nous savons dépendre de D seulement [§ 16, (18)], par $K'(D)$ le nombre des classes pour lesquelles $\left(\frac{D_1}{a}\right) = +1$, par $K''(D)$ celui des classes pour lesquelles $\left(\frac{D_1}{a}\right) = -1$,

$$(1)\qquad \begin{cases} 0 = L[K'(D) - K''(D)], \\ K'(D) = K''(D) = \frac{1}{2} K(D). \end{cases}$$

Considérons maintenant le produit

$$(2)\qquad \prod_i (1 + C_i) - 1 - \prod_i C_k.$$

où C_i parcourt tous les caractères fondamentaux et C_k tous ceux entrant dans la composition du caractère qui est toujours égal à $+1$ [§ 19, (2)], et formons l'équation (1) pour les $2\nu-2=2^\lambda-2$ caractères que présente le développement de cette expression. Pour chacun de ces $2\nu-2$ caractères, les classes se partageront en deux *groupes* contenant chacun $\frac{K(D)}{2}$ classes.

Soit $g_\alpha \geq 0$ le nombre des classes contenues dans un genre G_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, \nu$. On aura, puisque les g_α classes de G_α appartiennent toutes à la fois au même groupe que les g_1 classes d'un genre G_1, choisi arbitrairement, ou au groupe opposé

$$(3) \qquad g_1 \pm g_2 \pm g_3 \pm \ldots \pm g_\nu = 0,$$

g_α étant pris avec le signe + ou le signe — selon que, pour le caractère considéré, les g_α formes de G_α sont dans le même groupe que les g_1 classes de G_1 ou dans le groupe opposé.

Ajoutons les $2\nu-2$ équations (3); g_1 aura le coefficient $2\nu-2$. Pour trouver le coefficient a de g_α, appelons C_{i1}, $C_{i\alpha}$ les valeurs du caractère C_i dans G_1 et dans G_α, et remarquons que l'on a

$$(4) \qquad a = \prod_i (1 + C_{i1} C_{i\alpha}) - 1 - \prod_i C_{k1} C_{k\alpha},$$

puisque le développement de cette expression est la somme de $2\nu-2$ unités positives ou négatives de la forme

$$\prod_i{}^0 C_{i1} C_{i\alpha} = \prod_i{}^0 C_{i1} \prod_i{}^0 C_{i\alpha}$$

$\left[\prod_i^0 C_i\right.$ désignant un terme quelconque du développement de $\left.(2)\right]$ dont chacune est précisément positive ou négative selon que $\prod_i^0 C_{i1}$ et $\prod_i^0 C_{i\alpha}$ ont ou non le même signe, c'est-à-dire selon que, relativement à $\prod_i^0 C_i$, les g_α classes de G_α sont ou non dans le même groupe que les g_1 classes de G_1.

On voit maintenant sans peine que le second membre de (4) est toujours égal à -2; car un au moins des facteurs $1+C_{i1}C_{i\alpha}$ sera nul, sans quoi G_α coïnciderait avec G_1. Ainsi, la somme des équations (3) donne

$$(2\nu-2)g_1-2(g_2+g_3+\ldots+g_\nu)=0,$$

d'où, puisque $g_1+g_2+\ldots+g_\nu=K(D)$

$$g_1=\frac{K(D)}{2^{\lambda-1}}.$$

g_1 étant un genre quelconque, le théorème est démontré ([1]).

Il faut ajouter ici une observation. L'équation d'où nous sommes parti est illusoire si D_2 est un carré. Mais alors $\left(\frac{D_1}{a}\right)=\left(\frac{D_2}{a}\right)$, car $\left(\frac{D}{a}\right)=\left(\frac{D_1D_2}{a}\right)=+1$; donc $\left(\frac{D_1}{a}\right)=+1$ dans toutes les classes et n'est pas un caractère. Prenons par exemple le discriminant -27; $\left(\frac{-3}{a}\right)$ n'est pas un caractère et l'on voit qu'il n'y a aucun caractère. Il n'y a donc qu'un genre, le genre principal, et le théorème est alors évident. En général, pour les discriminants de la forme $p_i^{2\alpha+1}M^2$, $\left(\frac{p_i}{a}\right)$ n'est pas un caractère, et si $M^2=1$, il n'y a qu'un genre. Les discriminants du type $-2^{2\alpha}$ admettent deux caractères si $\alpha>2$; mais les discriminants -4 et -16 n'admettent aucun caractère et, par conséquent, ne donnent lieu qu'à un genre.

§ 21. Composition des genres. Nombre des classes ambiguës ([2]).

On voit que si ε, ε' sont les valeurs d'un caractère dans les deux classes H, H', la valeur de ce caractère dans la classe composée HH' sera $\varepsilon\varepsilon'$. Donc si K, K' appartiennent respectivement aux mêmes genres G, G' que H, H', KK' appartiendra au même genre que HH'. Ce genre est dit *composé* de G, G' ([3]).

([1]) DIRICHLET, *Zahlentheorie*, § 125.

([2]) On ne considérera dans ce paragraphe que les classes primitives.

([3]) GAUSS, *Disq.*, art. 246, 247.

De là résultent deux conséquences :

1° Puisque les caractères du genre principal sont tous égaux à $+1$, les n classes qu'il contient forment un groupe $\mathfrak{N}$ de degré n ([1]) qui divise le groupe $\mathfrak{H}$ des h classes primitives. Prenons g classes $H_i (i = 1, 2, \ldots, g; H_1 = 1)$, une dans chaque genre, et formons les complexes $\mathfrak{N} H_i$ qui contiennent ng classes différentes. A toute classe H'_i du même genre que H_i répond une classe telle que $KH_i = H'_i$ et l'on voit que K appartient à $\mathfrak{N}$. Donc les complexes $\mathfrak{N} H_i$ contiennent les h classes de $\mathfrak{H}$ et les caractères montrent que chaque complexe constitue un genre distinct. Ainsi $h = ng$, g étant le nombre des genres réellement existants ([2]).

2° Toute classe $Q = H^2$ résultant de la *duplication* d'une classe H appartient au genre principal. Les classes Q forment évidemment un groupe $\mathfrak{Q}$ dont le degré q divise n et h; donc $q \leqq n$.

D'autre part, les classes ambiguës A forment un groupe $\mathfrak{A}$ de degré a ([3]) qui permet de décomposer le groupe $\mathfrak{H}$ en un certain nombre de complexes $\mathfrak{A}$H chacun de α classes. Or, toutes les classes d'un complexe donnent par duplication la même classe H^2 et deux classes appartenant à deux complexes différents $\mathfrak{A}$H, $\mathfrak{A}$H' donneront, par duplication, deux classes H^2, H'^2 différentes, sans quoi, K étant une classe telle que $H' = HK$ [il y en a toujours (§ 13)], $H^2 = H'^2$ entraînerait $K^2 = 1$, $K = K^{-1}$, c'est-à-dire que K appartiendrait au groupe $\mathfrak{A}$ et H' à $\mathfrak{A}$H, contrairement à la loi de formation des complexes. Le nombre de ces complexes est donc précisément celui des classes Q et $h = \alpha q$.

Ainsi on a $\alpha q = ng$, $q \leqq n$, donc $g \leqq \alpha$.

On peut faire un pas de plus. Soit $\mathfrak{D}$ le plus grand commun divi-

---

([1]) D est dit régulier ou irrégulier selon que $\mathfrak{N}$ est lui-même régulier (ne contenant que des puissances d'une même classe) ou irrégulier. Dans le dernier cas, si δ est le degré du plus grand groupe régulier contenu dans $\mathfrak{N}$, l'indice $\frac{n}{\delta}$ de ce groupe s'appelle l'exposant d'irrégularité du discriminant (GAUSS, *Disq.*, art. 306.)

([2]) GAUSS, *Disq.*, art. 252.

([3]) Car, si A, A' sont deux classes ambiguës, de $A = A^{-1}$, $A' = A'^{-1}$, c'est-à-dire de $A^2 = A'^2 = 1$ on déduit $1 = A^2 A'^2 = (AA')^2$.

seur de $\mathfrak{A}$ et de $\mathfrak{N}$, d'ordre β. Si $\beta = n$, parmi les complexes $\mathfrak{N}H_i$, les uns se composeront uniquement de classes ambiguës, les autres uniquement de classes non ambiguës. Si $\beta < n$, partageons $\mathfrak{N}$ en complexes $\mathfrak{B}N_j \left(j = 1, 2, \ldots, \frac{n}{\beta}, N_1 = 1\right)$. Chacun d'eux donne par duplication une classe carrée distincte Q_j $(Q_1 = 1)$, on le verrait, comme tout à l'heure. Donc $\frac{n}{\beta} = q$. Chaque complexe $\mathfrak{N}H_i$ se partagera alors en q nouveaux complexes $\mathfrak{B}N_jH_i$ dont chacun fournit, par duplication, une des classes carrées. Celui où j est déterminé par $Q_jH_i^2 = 1$ fournissant la classe principale sera composé de classes ambiguës.

Ainsi, on voit *a priori* que chaque genre existant contient le même nombre de classes et, parmi elles, le même nombre β de classes ambiguës, à moins que les classes ambiguës ne composent à elles seules un certain nombre de genres parmi lesquels le principal.

Gauss a déterminé α et démontré que $g = \alpha$ (¹). En suivant Dirichlet, nous avons, au contraire, commencé par déterminer g. Il reste à montrer que $\alpha = g$ ou $\beta = 1$.

On sait qu'une classe ambiguë contient toujours une forme de l'un des deux types

$$(a, 0, c),$$
$$(a, a, c) \backsim (c, -a, a) \backsim (c, -a + 2c, c).$$

Changeant de notation, nous représenterons la dernière forme, $(c, -a + 2c, c)$ par (a, b, a).

Le premier type $(a, 0, c)$ ne peut se présenter si $D \equiv 1 \pmod 4$. Dans le second type (a, b, a), remarquons d'abord que a est premier à D, sans quoi, d'après $b^2 - 4a^2 = D$, a et b auraient un diviseur commun. De plus, si $D \equiv 0 \pmod 4$, on a, ou bien

$$b = 2b', \quad b' \equiv 1 \pmod 2, \quad D = 4(b'^2 - a^2) \equiv 0 \pmod{32},$$

ou bien

$$b = 4b', \quad D = 4(4b'^2 - a^2), \quad \frac{D}{4} \equiv -1 \pmod 4).$$

(¹) Voir le supplément X de M. Dedekind aux *Vorlesungen über Zahlentheorie* de Dirichlet.

Donc le second type est impossible dans les trois cas

$$D \equiv 0, 4, 8 \pmod{16} \qquad \text{et} \qquad \equiv 0 \pmod{32}.$$

Cela posé, μ étant toujours le nombre des facteurs premiers impairs de D', le nombre des décompositions de D' en deux facteurs premiers entre eux sera 2^{μ} (¹) et celui des décompositions de D sera $2^{\mu+\operatorname{sgn} k}$. Le nombre des formes primitives possibles du type $(a, 0, c)$ sera donc $2^{\mu+\operatorname{sgn} k+1}$, la moitié ayant des premiers coefficients < 0 et la moitié des premiers coefficients > 0.

Considérons le second type (a, b, a) pour lequel

$$D = (b + 2a)(b - 2a).$$

Si $D \equiv 1 \pmod 4$, toutes les décompositions $D' = st$ donnent pour a et b des valeurs entières premières entre elles. Il y a donc $2^{\mu+1}$ formes possibles du type (a, b, a).

Si $D \equiv 12 \pmod{16}$, à une décomposition $D' = st$ répondent pour D les trois décompositions $D = 4s.t$, $D = 2s.2t$, $D = s.4t$. $b + 2a$ et $b - 2a$ ne pouvant avoir d'autres diviseurs communs que 2 ou 4, et leur différence devant être divisible par 4, on ne pourra identifier la décomposition $(b + 2a)(b - 2a)$ qu'avec la décomposition $2s.2t$. Il y a donc encore $2^{\mu+1}$ formes possibles du type (a, b, a).

Si $D \equiv 0 \pmod{32}$, $D = 2^k D'$, $k \geqq 5$, pour chaque décomposition $D' = st$, la décomposition $(b + 2a)(b - 2a)$ pourra être identifiée avec les deux décompositions $2^{k-2}s.4t$, $4s.2^{k-2}t$ de D et avec ces deux-là seulement, ce qui donne $2^{\mu+2}$ formes du type (a, b, a).

En réunissant pour chaque discriminant les deux types de formes possibles et en comparant le résultat obtenu avec le Tableau du § 19, on voit qu'il y a $2^{\lambda} = 2g$ formes ambiguës possibles, g étant le nombre des genres. Mais, comme les formes répondant aux décompositions st et ts de D' sont équivalentes, à

(¹) Soient $a_1, a_2, \ldots, a_{\mu}$ les plus hautes puissances des facteurs premiers de D' qui divisent D'. A chaque produit des a_i répondra une décomposition de D'; il y a donc $1 + \mu + \frac{\mu(\mu-1)}{2} + \ldots = 2^{\mu}$ décompositions.

cause des relations

$$(a, 0, c) \backsim (c, 0, a), \qquad (a, b, a) \backsim (a, -b, a),$$

les classes distinctes représentées par toutes ces formes sont en nombre $\alpha \leqq g$.

Donc $\alpha = g$ et les α formes obtenues représentent autant de classes distinctes.

§ 22. Théorème sur le groupe $\mathfrak{K}_d$.

Pour terminer ce qui regarde la théorie des genres, je démontrerai un théorème qui sera le fondement de certaines généralisations subséquentes.

$\mathfrak{K}_d$ étant le groupe des classes primitives de discriminant $D = D'd^2$ (D' *ayant la forme discriminant*) *qui, composées avec une classe quelconque de diviseur d et de discriminant* D, *conduisent à une même classe de diviseur d et de discriminant* D, *tout caractère appartenant à* D *et à* D' *a la valeur* $+1$ *dans toutes les classes de* $\mathfrak{K}_d$, *et tout caractère appartenant à* D, *mais n'appartenant plus à* D', *prend dans les classes de* $\mathfrak{K}_d$ *autant de fois la valeur* $+1$ *que la valeur* -1; *si d est quelconque, il faut supposer* $D < 0$ *ou* $D \not\equiv 0 \pmod{16}$; *si d est impair,* D *peut être quelconque.*

Je dirai, pour abréger, qu'une classe où le caractère considéré prend la valeur $+1$ est une classe $+$, et qu'une classe où il prend la valeur -1 est une classe $-$; p désignera le nombre des classes $+$ et n le nombre des classes $-$ du groupe $\mathfrak{K}_d$; p est toujours > 0 puisque $\mathfrak{K}_d$ contient la classe principale.

Je vais maintenant montrer, à titre de lemme, que les deux seuls cas possibles sont $n = 0$, $n = p$.

Soient P le nombre des classes primitives $+$ non contenues dans $\mathfrak{K}_d$ et N le nombre des classes primitives $-$ également étrangères à $\mathfrak{K}_d$. On a

$$N + n = P + p = \frac{K(D)}{2}.$$

Supposons d'abord $N > P$, donc $n < p$, et composons $\mathfrak{K}_d$ avec

une des P classes $+$. Puisque la valeur d'un caractère quelconque dans une classe composée est le produit des valeurs de ce caractère dans les classes composantes, on obtiendra ici p classes $+$ et n classes $-$, et il restera

$$P_1 = P - p \quad \text{classes } + \qquad \text{et} \qquad N_1 = N - n \quad \text{classes } -.$$

Composons $\mathfrak{R}_d$ avec une de ces P_1, classes $+$; on aura de nouveau p classes $+$ et n classes $-$, et il restera

$$P_2 = P - 2p \quad \text{classes } + \qquad \text{et} \qquad N_2 = N - 2n \quad \text{classes } -.$$

Après i opérations, il restera

$$P_i = P - ip \quad \text{classes } + \qquad \text{et} \qquad N_i = N - in \quad \text{classes } -.$$

D'après l'hypothèse, $P < N$, $p > n$, $P - ip$ est $< N - in$. Donc P_i s'annulera avant N_i. Soit

$$(1) \qquad P_k = P - kp = 0, \qquad N_k = N - kn > 0.$$

Il ne doit plus rester de classes $+$. Si l'on compose alors $\mathfrak{R}_d$ avec une des N classes $-$, on obtiendra p classes $-$ et n classes $+$. Donc $n = 0$.

Supposons maintenant $N < P$, donc $n > p$, et faisons de même. On aura évidemment toujours $P_i > N_i$. Donc N_i s'annulera avant P_i. Soit

$$(2) \qquad P_k = P - kp > 0, \qquad N_k = N = kn = 0.$$

Il ne doit plus rester de classes $-$. Si l'on compose alors $\mathfrak{R}_d$ avec une des P_k classes $+$, on obtiendra p classes $+$ et n classes $-$, ce qui est impossible, puisque $n > p \geqq 1$.

Les deux seules hypothèses possibles sont donc $n = 0$, $n = p$. Pour reconnaître que la seconde est vérifiée, il suffira de constater dans $\mathfrak{R}_d$ l'existence d'une seule classe $-$.

Passons à la démonstration du théorème et distinguons différents cas.

Soit $d = q$ premier impair positif. On a, en représentant chaque classe par une forme,

$$\mathfrak{R}_q = \left(1,\ \lambda,\ \frac{\lambda^2 - D}{4}\right), \qquad \left(q^2,\ \beta q,\ \frac{\beta^2 - D'}{4}\right), \qquad D' = \frac{D}{d^2}$$
$$[\lambda = 0, 1 \ \text{et} \ \lambda \equiv D \pmod 2)],$$

β parcourant les valeurs incongrues $(\bmod 2q)$ telles que $\frac{\beta^2 - D'}{4}$ soit premier à q et que les formes représentantes de $\mathfrak{K}_d$ appartiennent à des classes différentes.

Si $D' \equiv 0 \pmod q$, D' admet tous les caractères de D. Soit $\left(\frac{M}{}\right)$ un de ces caractères, M étant supposé n'avoir aucun diviseur carré impair. Si M est premier à q, la valeur de ce caractère dans $\mathfrak{K}_q$ sera toujours

$$\left(\frac{M}{1}\right) = \left(\frac{M}{q^2}\right) = +1.$$

Si $M \equiv 0 \pmod q$, q est un des $|p_i|$, soit $q = |p_1|$, $M = M'p_1$, $\left(\frac{M'}{}\right) = +1$ dans toutes les classes de $\mathfrak{K}_q$ et l'on a

$$\left(\frac{p_1}{\frac{\beta^2 - D'}{4}}\right) = \left(\frac{p_1}{\beta^2 - D'}\right) = \left(\frac{p_1}{\beta^2}\right) = +1.$$

Soit $D' \not\equiv 0 \pmod q$. D' n'admet plus tous les caractères de D. Il suffira de prouver que $\left(\frac{p_1}{}\right)$ prend *une fois* la valeur -1.

Or $\mathfrak{K}_q$ contient

$$\left[q - \left(\frac{D'}{q}\right)\right] \frac{\log E(D')}{\log E(D)} = \frac{1}{\theta}\left[q - \left(\frac{D'}{q}\right)\right]$$

classes et, si $\theta > 1$, les $q - \left(\frac{D'}{q}\right)$ formes obtenues en donnant à β *toutes* les valeurs qui rendent *seulement* primitives les formes

$$\left(q^2, \beta q, \frac{\beta^2 - D'}{4}\right)$$

sont équivalentes θ à θ. Il suffira alors de prouver que le caractère

$$\left(\frac{p_1}{\frac{\beta^2 - D'}{4}}\right) = \left(\frac{p_1}{\beta^2 - D'}\right)$$

prend une seule fois la valeur -1 dans les $q - \left(\frac{D'}{q}\right)$ formes mentionnées. Tout revient donc à montrer que les $q - \left(\frac{D'}{q}\right)$ nombres

$$1, \quad \beta^2 - D',$$

que l'on peut supposer positifs (puisque β n'est déterminé qu'à un multiple près de $2q$), ne sont pas tous des restes $(\text{mod}\, q)$.

Soit $\left(\frac{D'}{q}\right) = -1$ [1]. Puisque 1 est reste, il y a au moins un reste ν *suivi* d'un non-reste $\nu+1$. Prenons

$$\beta^2 \equiv (\nu+1)D' \qquad (\text{mod}\, q)$$

(en ajoutant au besoin q à β on lui donnera la parité voulue); alors $\beta^2 - D' \equiv \nu D'$ sera un non-reste.

Soit $\left(\frac{D'}{q}\right) = +1$. Je dis d'abord qu'il existe toujours au moins un non-reste *suivi* d'un reste. En effet, si $q \equiv 1\,(\text{mod}\, 4)$, $q-1$ est reste. Si $q \equiv -1\,(\text{mod}\, 4)$, ou bien $q \equiv 3\,(\text{mod}\, 8)$ et $q-2$ est reste, ou bien $q \equiv 7\,(\text{mod}\, 8)$ et 1, 2 sont restes, $q-1$, $q-2$ sont non-restes; alors $\frac{q-1}{2}$ est non-reste puisque son produit par le reste 2 est le non-reste $q-1$ et $\frac{q+1}{2}$ est reste pour une raison semblable. Soit donc ν un non-reste suivi du reste $\nu+1$. Prenons

$$\beta^2 \equiv (\nu+1)D' \qquad (\text{mod}\, q);$$

alors $\beta^2 - D' \equiv \nu D'$ sera un non-reste.

Soit $d = 2$. $\mathfrak{R}_2$ sera représenté par

$$\left(1, 0, \frac{-D}{4}\right), \qquad \left(1, 2\beta, \frac{\beta^2 - D'}{4}\right).$$

Il ne s'agit ici que de la présence du facteur 2 dans Q, sans quoi il n'existerait point de formes de diviseur 2. La présence de ce facteur amène un ou deux caractères nouveaux, comme l'indique le Tableau suivant :

---

[1] Si $\left(\frac{D'}{q}\right) = -1$, la proposition est presque évidente, car β prend q valeurs incongrues $(\text{mod}\, q)$; donc β^2 parcourt $\frac{q-1}{2}$ restes et $\beta^2 \equiv 0\,(\text{mod}\, q)$; donc $\beta^2 - D'$ [qui ne peut être $\equiv 0\,(\text{mod}\, q)$ puisque D' est un non-reste] parcourt $\frac{q+1}{2}$ valeurs incongrues et $\not\equiv 0\,(\text{mod}\, q)$; l'une d'elles sera certainement un non-reste.

$D = 2^k M;\ \lvert M\rvert = \prod_1^\mu \lvert p_i^{\alpha_i}\rvert \equiv 1 \pmod 2$.		CARACTÈRES.	λ.
$D \equiv 1 \pmod 4$,		$\left(\frac{p_i}{}\right)$,	μ
$D \equiv 4 \pmod 8$,	$M \equiv 1 \pmod 4$	$\left(\frac{p_i}{}\right)$,	μ
$D \equiv 4 \pmod 8$,	$M \equiv -1 \pmod 4$	$\left(\frac{p_i}{}\right)$, $\left(\frac{-1}{}\right) = \left(\frac{-M}{}\right)$	$\mu + 1$
$D \equiv 8 \pmod{16}$,	$M \equiv 1 \pmod 4$	$\left(\frac{p_i}{}\right)$, $\left(\frac{2}{}\right) = \left(\frac{M}{}\right)$	$\mu + 1$
$D \equiv 8 \pmod{16}$,	$M \equiv -1 \pmod 4$	$\left(\frac{p_i}{}\right)$, $\left(\frac{-2}{}\right) = \left(\frac{-M}{}\right)$	$\mu + 1$
$D \equiv 16 \pmod{32}$,		$\left(\frac{p_i}{}\right)$, $\left(\frac{-1}{}\right)$	$\mu + 1$
$D \equiv 0 \pmod{32}$,		$\left(\frac{p_i}{}\right)$, $\left(\frac{-1}{}\right)$, $\left(\frac{2}{}\right)$	$\mu + 2$

Les cas $D \equiv 4 \pmod 8$, $8 \pmod{16}$, $M \equiv \pm 1 \pmod 4$ ne sont pas à considérer ici, puisque alors ou bien il n'y a pas de formes de diviseur 2, ou bien la suppression du facteur 2 dans Q n'enlève aucun caractère. D'ailleurs les caractères $\left(\frac{-1}{}\right)$, $\left(\frac{\pm 2}{}\right)$ sont alors exprimables par les $\left(\frac{p_i}{}\right)$. $\left(\frac{D'}{2}\right)$ étant donc toujours nul, le nombre des classes de $\mathfrak{R}_2$ sera 2 ou 1.

Passons en revue les différents caractères introduits par le facteur 2.

1° $\left(\frac{-1}{n}\right)$. Soit $D \equiv 0 \pmod{64}$. $\mathfrak{R}_2$ sera représenté par

$$(3)\qquad \left(1, 0, \frac{D}{4}\right), \qquad \left(4, 4, 1 - \frac{D}{16}\right),$$

$$\left(\frac{-1}{1}\right) = \left(\frac{-1}{1 - \frac{D}{16}}\right) = +1 \text{ [1]},$$

---

[1] Si D était > 0, on aurait

$$\left(\frac{-1}{1 - \frac{D}{16}}\right) = \left(\frac{-1}{\frac{D}{16} - 1}\right) = -1.$$

et, de fait, le caractère $\left(\frac{-1}{\ }\right)$ appartient encore à $\frac{D}{4} \equiv 0 \pmod{16}$.

Soit $D \equiv 32 \pmod{64}$. $\mathfrak{K}_2$ a la composition (3); mais, comme $\frac{D}{16} \equiv 2 \pmod 4$, on a

$$\left(\frac{-1}{1}\right) = -\left(\frac{-1}{1-\frac{D}{16}}\right)$$

et, de fait, le caractère $\left(\frac{-1}{\ }\right)$ n'appartient plus à $\frac{D}{4} \equiv 8 \pmod{16}$.

Soit $D \equiv 16 \pmod{32}$.

$$\mathfrak{K}_2 = \left(1, 0, \frac{D}{4}\right), \qquad \left(4, 0, \frac{-D}{16}\right),$$

$$\left(\frac{-1}{1}\right) = +1, \quad \left(\frac{-1}{-\frac{D}{16}}\right) = \begin{cases} +1 \text{ si } D_0 \equiv 0 \pmod 4 & [M \equiv -1 \pmod 4], \\ -1 \text{ si } D_0 \equiv +1 \pmod 4 & [M \equiv +1 \pmod 4], \end{cases}$$

ce qui est conforme à l'énoncé du théorème.

2° $\left(\frac{2}{n}\right)$. Dans ce qui suit, $\mathfrak{K}_2$ aura toujours la composition (3). Il suffira donc de considérer le signe du caractère $\left(\frac{\pm 2}{1-\frac{D}{16}}\right)$.

Soit $D_0 \equiv +1 \pmod 4$. Si $Q^2 \equiv 0 \pmod{256}$, on a

$$\left(\frac{2}{1-\frac{D}{16}}\right) = \left(\frac{2}{1-16D_0}\right) = +1.$$

Si $Q^2 \equiv 64 \pmod{256}$,

$$\left(\frac{2}{1-\frac{D}{16}}\right) = \left(\frac{2}{1-4D_0}\right) = \left(\frac{2}{5}\right) = -1.$$

Soit $D_0 \equiv 4 \pmod 8 = 4P$, $P \equiv -1 \pmod 4$. Si $Q^2 \equiv 0 \pmod{64}$,

$$\left(\frac{2}{1-\frac{D}{16}}\right) = \left(\frac{2}{1-16P}\right) = +1.$$

Si $Q^2 \equiv \ 6 \pmod{64}$,

$$\left(\frac{2}{1-\frac{D}{16}}\right) = \left(\frac{2}{1-4P}\right) = \left(\frac{2}{5}\right) = -1.$$

Soit $D_0 \equiv 0 \pmod 8 = 8P$, $P = \pm 1 \pmod 4$. Si $Q^2 \equiv 0 \pmod{16}$

$$\left(\frac{2}{1-\frac{D}{16}}\right) = \left(\frac{2}{1-8P}\right) = +1.$$

Si $Q^2 \equiv 4 \pmod{16}$,

$$\left(\frac{2}{1-\frac{D}{16}}\right) = \left(\frac{2}{1-2P}\right) = \begin{cases} +1 \text{ si } P \equiv +1 \pmod 4, \\ -1 \text{ si } P \equiv -1 \pmod 4. \end{cases}$$

3° $\left(\frac{-2}{n}\right)$. Soit $D_0 \equiv +1 \pmod 4$. Si $Q^2 \equiv 0 \pmod{256}$,

$$\left(\frac{-2}{1-\frac{D}{16}}\right) = \left(\frac{-2}{1-16D_0}\right) = +1.$$

Si $Q^2 \equiv 64 \pmod{256}$,

$$\left(\frac{-2}{1-\frac{D}{16}}\right) = \left(\frac{-2}{1-4D_0}\right) = \left(\frac{-2}{5}\right) = -1.$$

Soit $D_0 \equiv 4 \pmod 8 = 4P$, $P \equiv -1 \pmod 4$. Si $Q^2 \equiv 0 \pmod{64}$

$$\left(\frac{-2}{1-\frac{D}{16}}\right) = \left(\frac{-2}{1-16P}\right) = +1.$$

Si $Q^2 \equiv 16 \pmod{64}$,

$$\left(\frac{-2}{1-\frac{D}{16}}\right) = \left(\frac{-2}{1-4P}\right) = \left(\frac{-2}{5}\right) = -1.$$

Soit $D_0 \equiv 0 \pmod 8 = 8P$, $P \equiv \pm 1 \pmod 4$. Si $Q^2 \equiv 0 \pmod{16}$

$$\left(\frac{-2}{1-\frac{D}{16}}\right) = \left(\frac{-2}{1-D_0}\right) = +1.$$

Si $Q^2 \equiv 4 \pmod{16}$,

$$\left(\frac{-2}{1-\frac{D}{16}}\right) = \left(\frac{-2}{1-2P}\right) = \begin{cases} +1 \text{ si } P \equiv -1 \pmod 4, \\ -1 \text{ si } P \equiv +1 \pmod 4. \end{cases}$$

Ainsi, le théorème se trouve démontré quand d est premier. Si $d = \Pi q_i$ les q_i étant premiers, $\mathfrak{K}_d$ se compose de toutes les classes distinctes obtenues en composant les classes des $\mathfrak{K}_{q_i}$ de toutes les manières possibles. Si un des caractères de D n'appartient plus à $\frac{D}{d^2}$, une des classes de l'un des $\mathfrak{K}_{q_i}$ sera — relativement à ce caractère; donc une des classes de $\mathfrak{K}_d$ étant —, il faut, d'après le lemme, que la moitié des classes de $\mathfrak{K}_d$ soit — et la moitié +.

Enfin, si $d = \Pi q_i^{\alpha_i}$, soit $d_1 = \Pi q_i$; $\mathfrak{K}_d$ contient $\mathfrak{K}_{d_1}$. Si un des caractères de D n'appartient plus à $\frac{D}{d^2}$, une des formes de $\mathfrak{K}_{d_1}$, donc une des formes de $\mathfrak{K}_d$ sera — relativement à ce caractère, et, par conséquent, la moitié des formes de $\mathfrak{K}_d$ sera — et la moitié +.

Le théorème est donc démontré dans toutes ses parties.

CHAPITRE VI.

LES SOMMES DE GAUSS GÉNÉRALISÉES.

§ 23. Quelques transformations de séries (¹).

Je réunirai ici quelques transformations de séries analogues pour dégager les démonstrations subséquentes. Les séries $\mathfrak{I}$ sont comprises dans la formule unique

$$\mathfrak{I}_{g_1 g_2}(v, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{-\frac{i\pi g_2}{2}(2n+g_1)+i\pi v(2n+g_1)+\frac{i\pi\omega}{4}(2n+g_1)^2}$$

$$(g_1, g_2 = 0, 1),$$

qui, en posant

$$q = e^{i\pi\omega}, \quad |q| < 1$$

(c'est-à-dire que $i\omega$ a sa partie réelle < 0, condition nécessaire et suffisante de convergence), donne

$$(1)\quad \begin{cases} \mathfrak{I}_{11}(v) = \mathfrak{I}_1(v) = \mathfrak{I}(v) = \displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{i} q^{\frac{(2n+1)^2}{4}} e^{(2n+1)i\pi v} \\ \qquad = \displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\left[n^2\omega + n(2v+1+\omega) + v + \frac{\omega}{4} - \frac{1}{2}\right]\pi i} \\ \qquad = \displaystyle\sum_{\nu} e^{\left(\nu^2\frac{\omega}{4} + \nu v - \frac{\nu}{2}\right)\pi i} \quad (\nu = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots), \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \mathfrak{I}_{10}(v) = \mathfrak{I}_2(v) = \displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\frac{(2n+1)^2}{4}} e^{(2n+1)i\pi\nu} \\ \qquad = \displaystyle\sum_{\nu} e^{\left(\nu^2\frac{\omega}{4} + \nu v\right)\pi i} \quad (\nu = \pm 1, \pm 3, \ldots) \end{cases}$$

(¹) KRONECKER, *Sitzungsberichte*, p. 504, 1883; p. 124, 1889; p. 316 1889.

et

$$(3)\qquad \mathfrak{I}_{00}(v) = \mathfrak{I}_3(v) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{2ni\pi v} = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{(n^2\omega + 2nv)i\pi},$$

$$(4)\qquad \mathfrak{I}_{01}(v) = \mathfrak{I}_0(v) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2ni\pi v} = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{(n^2\omega - 2nv + n)\pi i}.$$

La première fonction satisfait aux équations de transformation ([1]),

$$(5)\qquad \mathfrak{I}\left(v, \frac{-1}{\omega}\right) = -i\left(\sqrt{-i\omega}\right) e^{v^2\omega\pi i} \mathfrak{I}(\omega v, \omega),$$

$$(6)\qquad \mathfrak{I}(v, \omega + 1) = e^{\frac{\pi i}{4}} \mathfrak{I}(v, \omega).$$

Il s'agit d'établir les égalités

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} & e^{\tau^2(\omega_1+\omega_2)\pi i} \mathfrak{I}(\sigma + \tau\omega_1, \omega_1) \mathfrak{I}(\sigma - \tau\omega_2, \omega_2) \\ & = -\left(\sqrt{c_0}\right) \sum_{m,n} (-1)^{(m-1)(n-1)} e^{-\pi f(m,n) + 2(m\sigma + n\tau)\pi i}; \end{aligned}\right.$$

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} & e^{\tau^2(\omega_1+\omega_2)\pi i} \mathfrak{I}(\sigma + \tau\omega_1, \omega_1) \mathfrak{I}_0(\sigma - \tau\omega_2, \omega_2) \\ & = \left(\sqrt{c_0}\right) \sum_{m,n} i^{(2m+1)(n-1)} e^{-\pi f\left(m+\frac{1}{2}, n\right) + 2\left[\sigma\left(m+\frac{1}{2}\right) + n\tau\right]\pi i}; \end{aligned}\right.$$

$$(9)\qquad \sum_{m,n} e^{-2\pi u f(m,n) + 2(m\sigma + n\tau)\pi i} = \frac{1}{u} \sum_{m,n} e^{-\frac{2\pi}{u} f'(\sigma + m, \tau + n)};$$

$$f(x, y) = a_0 x^2 + b_0 xy + c_0 y^2; \qquad f'(x, y) = c_0 x^2 - b_0 xy + a_0 y^2;$$
$$4a_0 c_0 - b_0^2 = 1;$$

ω_1, $-\omega_2$ sont racines de $f(1, w) = 0$ et $w_1 i$, $w_2 i$ ont leurs parties réelles négatives; a_0, b_0, c_0 sont donc déterminés par

$$a_0 = \frac{-\omega_1\omega_2 i}{\omega_1 + \omega_2}, \qquad b_0 = \frac{-i(\omega_1 - \omega_2)}{\omega_1 + \omega_2}, \qquad c_0 = \frac{i}{\omega_1 + \omega_2},$$
$$\omega_1 = \frac{-b_0 + i}{2c_0}, \qquad \omega_2 = \frac{b_0 + i}{2c_0};$$

σ, τ sont arbitraires, réels ou complexes; on voit d'ailleurs que les

---

([1]) Voir le § 30 et l'ouvrage de M. Weber, § 26. De la définition de $(\sqrt{a})$ donnée au § 3, il résulte que, si a est complexe, $(\sqrt{a})$ est la racine prise avec la partie réelle positive ou, si celle-ci est nulle, avec la partie imaginaire positive.

deux membres de (9) restent inaltérés quand σ, τ varient de nombres entiers (les termes du second membre s'échangeant alors les uns dans les autres);

u sera supposé réel positif; mais il est facile de voir que, si a_0, b_0, c_0, sont réels, il suffit que u ait une partie réelle positive;

$$m,\quad n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots;\qquad \nu = \pm 1,\ \pm 3,\ \pm 5,\ \ldots.$$

Quand σ, τ tendent simultanément vers des nombres entiers et u vers zéro, les deux membres de (9) croissent indéfiniment.

Posons, pour abréger,

$$e^{\tau^2(\omega_1+\omega_2)\pi i}\,\mathfrak{S}(\sigma+\tau\omega_1, \omega_1)\,\mathfrak{S}(\sigma-\tau\omega_2, \omega_2) = \mathrm{P}(\sigma, \tau, \omega_1, \omega_1);$$

on aura

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(\sigma, \tau, \omega_1, \omega_2)\\
&\quad = e^{\tau^2(\omega_1+\omega_2)\pi i}\sum_{\mu} e^{\frac{1}{4}[\mu^2\omega_1+4\mu(\sigma+\tau\omega_1)-2\mu]\pi i}\sum_{\nu} e^{\frac{1}{4}[\nu^2\omega_2+4\nu(\sigma-\tau\omega_2)-2\nu]\pi i}\\
&\quad = \sum_{\mu,\nu} e^{\pi i\varphi(\mu,\nu)}
\end{aligned}$$

$$(\mu,\ \nu = \pm 1,\ \pm 3,\ \pm 5,\ \ldots);$$

$$\varphi(\mu,\nu) = \frac{1}{4}(\mu^2\omega_1+\nu^2\omega_2)+(\mu+\nu)\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)+(\mu\omega_1-\nu\omega_2)\tau+(\omega_1+\omega_2)\tau^2,$$

ou, en posant $\mu+\nu = 2m$,

$$\begin{aligned}
\varphi(\mu,\nu) &= \frac{1}{4}(\omega_1+\omega_2)(\nu-2\tau)^2 - m\omega_1(\nu-2\tau)+m^2\omega_1+m(2\sigma-1)\\
&= \frac{1}{4}(\omega_1+\omega_2)\left(2\tau-\nu+\frac{2m\omega_1}{\omega_1+\omega_2}\right)^2+\frac{m^2\omega_1\omega_2}{\omega_1+\omega_2}+m(2\sigma-1).
\end{aligned}$$

Appliquons maintenant la formule (5). Si l'on y fait $v = \eta + \frac{1}{2\omega}$, le premier membre devient $\left(\omega' = \frac{-1}{\omega}\right)$,

$$\mathfrak{S}\left(\eta-\frac{\omega'}{2}, \omega'\right) = \sum_{\nu} e^{\frac{1}{4}\left[\nu^2\omega'+4\nu\left(\eta-\frac{\omega'}{2}\right)-2\nu\right]\pi i}\qquad (\nu = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots),$$

et le second

$$-i(\sqrt{-\omega i})\,e^{\left(\eta^2+\frac{\eta}{\omega}+\frac{1}{4\omega^2}\right)\omega\pi i}\sum_{\nu} e^{\frac{1}{4}(\nu^2\omega+4\nu\eta\omega)\pi i},$$

ou

$$-i(\sqrt{-\omega i})\,e^{\left(\eta+\frac{1}{4\omega}\right)\pi i}\sum_{\nu} e^{\omega\pi i\left(\eta+\frac{\nu}{2}\right)^2}.$$

Donc, en multipliant les deux membres par $ie^{-\left(\eta-\frac{\omega'}{4}\right)\pi i}$ et en introduisant dans le premier n au lieu de ν d'après la relation $\nu = 2n+1$, on aura, pour la formule en question,

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{(n^2\omega'+2n\eta-n)\pi i} = (\sqrt{-\omega i})\sum_{\nu} e^{\omega\pi i\left(\eta+\frac{\nu}{2}\right)^2} \qquad (\nu = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots),$$

ou, puisqu'on peut changer ν en $-\nu$,

$$(10)\quad \begin{cases} (\sqrt{-\omega i})\sum_{\nu} e^{\frac{\omega\pi i}{4}(2\eta-\nu)^2} = \sum_{n} e^{(n^2\omega'+2n\eta-n)\pi i}, \qquad \omega' = \frac{-1}{\omega} \\ (\nu = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots;\ n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots). \end{cases}$$

Prenons dans (10)

$$\omega = \omega_1+\omega_2, \qquad \eta = \tau + \frac{m\omega_1}{\omega_1+\omega_2} = \tau + \frac{m}{2} + \frac{m}{2}\,\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1+\omega_2};$$

elle donnera

$$(\sqrt{-(\omega_1+\omega_2)i})\sum_{\mu,\nu} e^{\pi i\varphi(\mu,\nu)} = \sum_{m,n} e^{\pi i\psi(m,n)},$$

$$\psi(m,n) = \frac{1}{\omega_1+\omega_2}[m^2\omega_1\omega_2 + mn(\omega_1-\omega_2) - n^2]$$
$$+ mn + m(2\sigma-1) + n(2\tau-1)$$
$$(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots;\ \mu, \nu = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots).$$

On en conclut (¹)

$$(11)\quad \begin{cases} P(\sigma, \tau, \omega_1, \omega_2) = -(\sqrt{c_0})\sum_{m,n}(-1)^{(m-1)(n-1)} e^{-\pi f(m,n)+2(m\sigma+n\tau)\pi i} \\ (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \end{cases}$$

On a d'ailleurs, d'après la définition même de $P(\sigma, \tau, \omega_1, \omega_2)$,

$$P_{11} = \frac{\partial^2 P}{\partial\sigma^2}(\sigma = 0, \tau = 0) = 2\,\mathfrak{S}'(0, \omega_1)\,\mathfrak{S}'(0, \omega_2),$$

$$P_{12} = \frac{\partial^2 P}{\partial\sigma\,\partial\tau}(\sigma = 0, \tau = 0) = (\omega_1-\omega_2)\,\mathfrak{S}'(0, \omega_1)\,\mathfrak{S}(0, \omega_2),$$

$$P_{22} = \frac{\partial^2 P}{\partial\tau^2}(\sigma = 0, \tau = 0) = -2\omega_1\omega_2\,\mathfrak{S}'(0, \omega_1)\,\mathfrak{S}(0, \omega_2)$$

(¹) On voit sans peine que $\frac{1}{(\sqrt{-(\omega_1+\omega_2)i})} = (\sqrt{c_0})$, les deux membres ayant leurs parties réelles et leurs carrés égaux.

et, par conséquent,

$$c_0 P_{11} = 2 c_0 \mathfrak{I}'(0, \omega_1) \mathfrak{I}'(0, \omega_2),$$
$$c_0 P_{12} = -b_0 \mathfrak{I}'(0, \omega_1) \mathfrak{I}'(0, \omega_2),$$
$$c_0 P_{22} = 2 a_0 \mathfrak{I}'(0, \omega_1) \mathfrak{I}'(0, \omega_2),$$

d'où, en multipliant par a_0, b_0, c_0 et en ajoutant ($4a_0c_0 - b_0^2 = 1$)

$$c_0(a_0 P_{11} + b_0 P_{12} + c_0 P_{22}) = \mathfrak{I}'(0, \omega_1) \mathfrak{I}'(0, \omega_2),$$

et, comme la différentiation de (11) donne simplement

$$c_0(a_0 P_{11} + b_0 P_{12} + c_0 P_{22}) = 4\pi^2 (\sqrt{c_0})^3 \sum_{m,n} (-1)^{(m-1)(n-1)} f(m, n) e^{-\pi f(m,n)},$$

$$(12) \quad \begin{cases} \mathfrak{I}'(0, \omega_1) \mathfrak{I}'(0, \omega_2) = 4\pi^2 (\sqrt{c_0})^3 \displaystyle\sum_{m,n} (-1)^{(m-1)(n-1)} f(m, n) e^{-\pi f(m,n)} \\ \qquad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots). \end{cases}$$

La formule (8) se démontre d'une manière toute semblable

$$e^{\tau^2(\omega_1+\omega_2)\pi i} \mathfrak{I}(\sigma + \tau\omega_1, \omega_1) \mathfrak{I}_0(\sigma - \tau\omega_2, \omega_2)$$
$$= e^{\tau^2(\omega_1+\omega_2)\pi i} \sum_{\lambda} e^{\left[\lambda^2 \frac{\omega_1}{4} + \lambda(\sigma+\tau\omega_1) - \frac{\lambda}{2}\right]\pi i} \sum_{l} e^{(l^2\omega_2 - 2l(\sigma-\tau\omega_2) + l)\pi i} = \sum_{\lambda, l} e^{\pi i \varphi(\lambda, l)}$$
$$(\lambda = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots; \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots),$$

$$\varphi(\lambda, l) = \tau^2(\omega_1 + \omega_2) + \lambda^2 \frac{\omega_1}{4} + \lambda(\sigma + \tau\omega_1) - \frac{\lambda}{2} + l^2\omega_2 - 2l(\sigma - \tau\omega_2) + l;$$

posons alors

$$\lambda = 2n + 1, \qquad l = n + \frac{\mu + 1}{2}, \qquad \sigma = \frac{s + 1}{2}, \qquad \tau = \frac{t - 1}{2};$$

il viendra

$$\varphi(\lambda, l) = n^2(\omega_1 + \omega_2) + n[t(\omega_1 + \omega_2) + \mu\omega_2]$$
$$+ \frac{\mu^2}{4}\omega_2 - \frac{\mu}{2}(s - t\omega_2) + \frac{\omega_1 + \omega_2}{4} t^2.$$
$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots; \quad \mu = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots)$$

Or (10) donne, en y faisant $\omega = ic_0$ (¹), $2r_1 - 1 = x$, $\nu + 1 = 2m$,

$$(13)\quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_n e^{-n^2\frac{\pi}{c_0} + nx\pi i} = (\sqrt{c_0}) \sum_m e^{-\frac{\pi c_0}{4}(x+2m)^2}, \\ \qquad (m,\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots) \end{array} \right.$$

d'où, pour $x = l(\omega_1 + \omega_2) + \mu\omega_2$,

$$\begin{aligned} &\sum_{\lambda, l} e^{\pi i \varphi(\lambda, l)} \\ &= (\sqrt{c_0}) \sum_{\mu, m} e^{-\frac{\pi c_0}{4}[l(\omega_1+\omega_2)+\mu\omega_2+2m]^2 + \left[\frac{\mu^2}{4}\omega_2 - \frac{\mu}{2}(s - l\omega_2) + \frac{\omega_1+\omega_2}{4} l^2\right]\pi i} \\ &= (\sqrt{c_0}) \sum_{\mu, m} e^{-\pi f\left(\frac{\mu}{2}, m\right) - \frac{1}{2}(\mu m + \mu s + 2ml)\pi i} \\ &= (\sqrt{c_0}) \sum_{\mu, m} e^{-\pi f\left(\frac{\mu}{2}, m\right) + \frac{1}{2}[-\mu m + \mu(2\sigma - 1) + 2m(2\tau + 1)]\pi i} \\ &= (\sqrt{c_0}) \sum_{\mu, m} (-1)^m i^{-\mu(m+1)} e^{-\pi f\left(\frac{\mu}{2}, m\right) + 2\left(\frac{\mu}{2}\sigma + m\tau\right)\pi i}, \\ &\qquad (\mu = \pm 1\ \pm 3,\ \pm 5,\ \ldots:\qquad m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots), \end{aligned}$$

d'où la formule (8).

Kronecker fait observer qu'on peut de même transformer en série de Rosenhain le produit plus général

$$e^{(\tau_1^2\omega_1 + \tau_2^2\omega_2 + \sigma_1\tau_1 + \sigma_2\tau_2)\pi i}\, \mathfrak{I}(\sigma_1 + \tau_1\omega_1, \omega_1)\, \mathfrak{I}(\sigma_2 + \tau_2\omega_2, \omega_2).$$

Passons à la formule (9) et remarquons d'abord que les conditions imposées à a_0, b_0, c_0, u sont nécessaires et suffisantes pour la convergence des séries qui y figurent. Posons, en effet,

$$\omega_1 = u_1 + v_1 i, \qquad \omega_2 = u_2 + v_2 i, \qquad v_1 > 0, \qquad v_2 > 0;$$

la partie réelle de $a_0 x^2 + b_0 xy + c_0 y^2$ sera la forme à coefficients réels

$$\frac{[(u_1^2 + v_1^2)v_2 + (u_2^2 + v_2^2)v_1]x^2 - 2(u_1 v_2 - u_2 v_1)xy + (v_1 + v_2)y^2}{(u_1 + u_2)^2 + (v_1 + v_2)^2},$$

(¹) $i\omega = -c_0 = \dfrac{1}{i\omega_1 + i\omega_2}$ a bien sa partie réelle négative.

qui est une forme positive, car le réalisant du numérateur

$$\begin{aligned}(u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 - (v_1 + v_2)[(u_1^2 + v_1^2)v_2 + (u_2^2 + v_2^2)v_1] \\ = - v_1 v_2[(u_1 + u_2)^2 + (v_1 + v_2)^2]\end{aligned}$$

est négatif quand v_1 et v_2 ont le même signe. Ainsi, pour que la forme soit positive, il faut et suffit (les coefficients extrêmes devant être > 0) que v_1 et v_2 soient positifs. La partie réelle de $f'(x, y)$ se déduisant de celle de $f(x, y)$ par le changement de x en $-y$ et de y en x, sera évidemment, dans les mêmes conditions, une forme positive. Donc les conditions $v_1 > 0$, $v_2 > 0$, u étant réel et positif, sont nécessaires et suffisantes pour la convergence en question. Partons encore de la formule (10), en y faisant

$$\omega = \frac{i}{2 c_0 u} \text{ (1)}, \qquad \eta = m b_0 u i + \tau + \frac{1}{2},$$

ce qui donne

$$\sum_n e^{-2\pi u c_0 n^2 - 2\pi u b_0 m n + 2 n \tau \pi i} = \left(\sqrt{\frac{1}{2 c_0 u}}\right) \sum_\nu e^{\left(m b_0 u i + \tau + \frac{1+\nu}{2}\right)^2 \frac{-\pi}{2 c_0 u}}$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \qquad \nu = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots).$$

Si l'on multiplie les deux membres par $e^{-2\pi u a_0 m^2 + 2 m \sigma \pi i}$ et qu'on somme par rapport à $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, on aura au premier membre

$$(14) \qquad \begin{cases} \sum_{m,n} e^{-2\pi u (a_0 m^2 + b_0 m n + c_0 n^2) + 2 (m\sigma + n\tau)\pi i} \\ (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots) \end{cases}$$

et au second membre

$$\left(\sqrt{\frac{1}{2 c_0 u}}\right) \sum_{m,\nu} e^{-2 a_0 m^2 \pi u + 2 m \sigma \pi i - \frac{\pi}{2 c_0 u}\left(m b_0 u i + \tau + \frac{1+\nu}{2}\right)^2}$$

$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots; \qquad \nu = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots),$$

---

(1) $i\omega = \frac{-1}{2 u c_0}$ a comme $\frac{-1}{c_0} = i\omega_1 + i\omega_2$ sa partie réelle négative.

ou, en posant $\frac{1+\nu}{2} = n$,

$$\left(\sqrt{\frac{1}{2c_0 u}}\right)\sum_{m,n} e^{-2a_0 m^2 \pi u + 2m\sigma\pi i - \frac{\pi}{2c_0 u}[-m^2 b_0^2 u^2 + (\tau+n)^2 + 2m b_0 i u(\tau+n)]},$$

ou, d'après $4a_0c_0 - b_0^2 = 1$,

$$\left(\sqrt{\frac{1}{2c_0 u}}\right)\sum_{m,n} e^{-\frac{m^2 u\pi}{2c_0} + m\pi i\left[2\sigma - \frac{b_0}{c_0}(\tau+n)\right] - \frac{\pi}{2c_0 u}(\tau+n)^2}. \tag{15}$$

Reprenons maintenant la formule (10), en y changeant ν en $2m - 1$, ce qui donne

$$\sum_m e^{\left(-\frac{m^2}{\omega} + 2m\eta - m\right)\pi i} = \left(\sqrt{-\omega i}\right)\sum_m e^{\omega\pi i\left(\eta + m - \frac{1}{2}\right)^2}$$

$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

et faisons-y

$$\omega = \frac{2c_0 i}{u} \ (^1), \qquad \eta = \frac{-b_0}{2c_0}(\tau+n) + \sigma + \frac{1}{2};$$

elle devient

$$\sum_m e^{-\frac{m^2\pi u}{2c_0} + \left[\frac{-b_0}{c_0}(\tau+n) + 2\sigma\right]m\pi i} = \left(\sqrt{\frac{2c_0}{u}}\right)\sum_m e^{-\frac{2\pi c_0}{u}\left[\frac{b_0}{2c_0}(\tau+n) + \sigma + m\right]^2}.$$

En multipliant les deux membres par $\left(\sqrt{\frac{1}{2c_0 u}}\right)e^{-\frac{\pi}{2c_0 u}(\tau+n)^2}$ et en sommant par rapport à $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, on obtient au premier membre l'expression (15), et au second

$$\frac{1}{u}\sum_{m,n} e^{-\frac{2\pi}{u}\left[(\tau+n)^2\left(\frac{b_0^2}{4c_0} + \frac{1}{4c_0}\right) - (\sigma+m)(\tau+n)b_0 + (\sigma+m)^2 c_0\right]},$$

ou, d'après $4a_0c_0 - b_0^2 = 1$,

$$\frac{1}{u}\sum_{m,n} e^{-\frac{2\pi}{u}f'(\tau+n,\, \sigma+m)}. \tag{16}$$

---

(1) $i\omega = \frac{-2c_0}{u}$ a, comme $-c_0 = \frac{1}{i\omega_1 + i\omega_2}$, sa partie réelle négative.

En égalant (14) et (16), on obtient la formule (9) qu'il s'agissait d'établir.

On peut écrire cette formule (9) sous une forme légèrement différente. Posons

$$u = -\frac{\log z}{2\pi} \qquad (z \text{ réel} < 1;\ \log z \text{ réel} < 0);$$

il viendra

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{m,n} z^{f(m,n)} e^{2(m\sigma+n\tau)\pi i} = \frac{-2\pi}{\log z} \sum_{m,n} e^{\frac{4\pi^2}{\log z} f'(\sigma+m,\,\tau+n)}, \\ \qquad (m,\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots) \end{array} \right.$$

ou, en séparant dans les deux membres le terme correspondant à $m = n = 0$,

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{m,n} z^{f(m,n)} e^{2(m\sigma+n\tau)\pi i} \\ \quad = -1 - \frac{2\pi}{\log z} e^{\frac{4\pi^2}{\log z} f'(\sigma,\,\tau)} - \frac{2\pi}{\log z} \sum_{m,n} e^{\frac{4\pi^2}{\log z} f'(\sigma+m,\,\tau+n)} \\ \quad (m,\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots,\ \text{ sauf } \ m = n = 0); \end{array} \right.$$

c'est sous cette forme qu'elle a été employée par Kronecker. La même séparation donnerait, au lieu de la formule (9),

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{m,n} e^{-2\pi u f(m,n) + 2(m\sigma+n\tau)\pi i} \\ \quad = -1 + \frac{1}{u} e^{-\frac{2\pi}{u} f'(\sigma,\,\tau)} + \frac{1}{u} \sum_{m,n} e^{-\frac{2\pi}{u} f'(\sigma+m,\,\tau+n)} \\ \quad (m,\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots \ \text{ sauf } \ m = n = 0). \end{array} \right.$$

Il y a lieu de faire ici une remarque importante. Le premier membre de (19) ne converge plus pour $u = \sigma = \tau = 0$; mais la série

$$\sum_{m,n} \frac{1}{u} e^{-\frac{2\pi}{u} f'(\sigma+m,\,\tau+n)} \qquad (m,\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots \ \text{ sauf } \ m = n = 0)$$

converge quand u tend vers zéro par des valeurs positives ainsi que $|\sigma|$ et $|\tau|$, car, σ et τ ayant des valeurs quelconques, tous ses termes décroissent avec u en valeur absolue et ont pour limite 0. Donc, toute la singularité du premier membre de (19),

quand u, $|\sigma|$, $|\tau|$ tendent vers zéro, se trouve reportée sur le seul terme $\frac{1}{u}e^{-\frac{2\pi}{u}f(\sigma,\tau)}$ du second membre ([1]). C'est ce qui fait l'importance de cette transformation.

§ 24. Introduction des fonctions elliptiques. Généralisation des sommes de Gauss.

Si, dans la formule (7) du § 18, on suppose que D_1, D_2 sont des discriminants fondamentaux, ce qui permet d'y remplacer $\left(\frac{D_\alpha}{r_\alpha}\right)$ $(\alpha = 1, 2)$ par

$$\left(\frac{D_\alpha}{r_\alpha}\right) = \frac{1}{(\sqrt{D_\alpha})}\sum_{k_\alpha=1}^{k_\alpha=|D_\alpha|}\left(\frac{D_\alpha}{k_\alpha}\right)e^{\frac{2r_\alpha k_\alpha \pi i}{|D_\alpha|}}, \qquad r_\alpha > 0 \qquad [\S\ 5, (11)],$$

elle deviendra

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{2\tau}{(\sqrt{D_1})(\sqrt{D_2})}\sum_{k_1,k_2}\sum_{r_1,r_2}\left(\frac{D_1}{k_1}\right)\left(\frac{D_2}{k_2}\right)e^{2\pi i\left(\frac{k_1r_1}{|D_1|}+\frac{k_2r_2}{|D_2|}\right)}F(r_1r_2)\\ &\quad = \sum_{a,b,c}\left[\left(\frac{D_1}{A}\right)+\left(\frac{D_2}{A}\right)\right]\sum_{m,n}F(am^2+bmn+cn^2),\end{aligned}\right.$$

et l'on peut faire $D_2 = 1$.

Soit alors $D = D_1D_2 < 0$, $Q^2 = 1$. Il faudra, dans (1), faire

$$r_1,\ r_2 = 1,\ 2,\ \ldots,\ +\infty,$$
$$m,\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\ \pm\infty \qquad \text{sauf} \qquad m = n = 0.$$

Remarquons que, d'après le § 4, si $D_\alpha > 0$,

$$\left(\frac{D_\alpha}{k_\alpha}\right) = \left(\frac{D_\alpha}{|D_\alpha| - k_\alpha}\right),$$

et, si $D_\alpha < 0$,

$$\left(\frac{D_\alpha}{k_\alpha}\right) = \left(\frac{D_\alpha}{-k_\alpha}\right) = \left(\frac{D_\alpha}{-k_\alpha - D_\alpha}\right)(-1)^{\frac{\operatorname{sgn}[-k_\alpha(-k_\alpha - D_\alpha)]-1}{2}} = -\left(\frac{D_\alpha}{|D_\alpha| - k_\alpha}\right);$$

([1]) Si σ, τ tendaient vers des entiers m_1, n_1, la singularité du premier membre se trouverait reportée sur le terme $\frac{1}{u}e^{-\frac{2\pi}{u}f(\sigma-m_1,\,\tau-n_1)}$ du second.

on peut, par suite, écrire (1) comme il suit

$$\frac{-2\tau}{(\sqrt{D_1})(\sqrt{D_2})}\sum_{k_1,k_2}\sum_{r_1,r_2}\left(\frac{D_1}{|D_1|-k_1}\right)\left(\frac{D_2}{|D_2|-k_2}\right)e^{-2\pi i\left[\frac{(|D_1|-k_1)r_1}{|D_1|}+\frac{(|D_2|-k_2)r_2}{|D_2|}\right]}F(r_1r_2)$$
$$=\sum_{a,b,c}\left[\left(\frac{D_1}{A}\right)+\left(\frac{D_2}{A}\right)\right]\sum_{m,n}F(am^2+bmn+cn^2).$$

Quand k_α parcourt les valeurs 1, 2, ..., $|D_\alpha|$, $|D_\alpha|-k_\alpha$ parcourt 0, 1, 2, ..., $|D_\alpha|-1$.

Remplaçons $|D_\alpha|-k_\alpha$ par k_α et faisons parcourir à ce nouveau k_α les valeurs 1, 2, ..., $|D_\alpha|$, ce qui est indifférent; il viendra

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{-2\tau}{(\sqrt{D_1})(\sqrt{D_2})}\sum_{k_1,k_2}\sum_{r_1,r_2}\left(\frac{D_1}{k_1}\right)\left(\frac{D_2}{k_2}\right)e^{-2\pi i\left(\frac{k_1r_1}{|D_1|}+\frac{k_2r_2}{|D_2|}\right)}F(r_1r_2)\\&\quad=\sum_{a,b,c}\left[\left(\frac{D_1}{A}\right)+\left(\frac{D_2}{A}\right)\right]\sum_{m,n}F(am^2+bmn+cn^2),\end{aligned}\right.$$

Retranchons (2) de (1), puis ajoutons (1) à (2); nous obtiendrons

$$(3)\quad\sum_{k_1,k_2}\sum_{r_1,r_2}\left(\frac{D_1}{k_1}\right)\left(\frac{D_2}{k_2}\right)\cos 2\pi\left(\frac{k_1r_1}{|D_1|}+\frac{k_2r_2}{|D_2|}\right)F(r_1r_2)=0.$$

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{2\tau}{|\sqrt{D}|}\sum_{k_1,k_2}\sum_{r_1,r_2}\left(\frac{D_1}{k_1}\right)\left(\frac{D_2}{k_2}\right)\sin 2\pi\left(\frac{k_1r_1}{|D_1|}+\frac{k_1r_2}{|D_2|}\right)F(r_1r_2)\\&\quad=\sum_{a,b,c}\left[\left(\frac{D_1}{A}\right)+\left(\frac{D_2}{A}\right)\right]\sum_{m,n}F(am^2+bmn+cn^2);\end{aligned}\right.$$

$\sum_{a,b,c}$ s'étend à tous les représentants des classes primitives de discriminant D (¹);

A est premier à 2D, représentable par (a, b, c);

D, D_1, D_2 sont trois discriminants fondamentaux et $D=D_1D_2<0$;

$\tau=2$ si $D<-4$, $\tau=4$ si $D=-4$, $\tau=6$ si $D=-3$;

$k_\alpha=1, 2, \ldots, |D_\alpha|$ $(\alpha=1, 2)$;

$r_1, r_2=1, 2, 3, \ldots, +\infty$;

$m, n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty$ sauf $m=n=0$.

(¹) $\left(\frac{Q'}{m}\right)=1$ ne figure plus sous le signe $\sum_{m,n}$ et l'ensemble des nombres $am^2+bmn+cn^2$ est indépendant du représentant choisi par la classe.

On peut maintenant introduire de plusieurs manières les fonctions elliptiques en se servant des développements donnés par Halphen (1) :

$$\frac{\vartheta'_{11}(0)\vartheta_{11}(u+v)}{\vartheta_{11}(u)\vartheta_{11}(v)} - \pi(\cot\pi v + \cot\pi u) = 4\pi\sum_{m,\,n} q^{2mn}\sin 2\pi(mu+nv)$$

$$(m,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ +\infty),$$

$$\frac{\vartheta'_{11}(0)\vartheta_{11}(u+v)}{\vartheta_{01}(u)\vartheta_{01}(v)} = 4\pi\sum_{\mu,\,\nu} q^{\frac{1}{2}\mu\nu}\sin\pi(\mu u + \nu v) \quad (2)$$

$$(m,\ n = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ +\infty),$$

d'où l'on tire, en changeant u en $u+\frac{1}{2}$ et v en $v+1$

$$\frac{\vartheta'(0)\vartheta_{10}(u+v)}{\vartheta_{00}(u)\vartheta_{01}(v)} = 4\pi\sum_{\mu,\,\nu} q^{\frac{1}{2}\mu\nu}(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}\cos(\mu u + \nu v)$$

$$(\mu,\ \nu = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ +\infty).$$

Dans ces trois développements les conditions de convergence sont, en posant $q = e^{i\pi\omega}$ et en désignant par $R(x)$ la partie réelle de x,

$$-R\left(\frac{\omega}{i}\right) < \begin{Bmatrix} R\left(\frac{u}{i}\right) \\ R\left(\frac{v}{i}\right) \end{Bmatrix} < R\left(\frac{\omega}{i}\right).$$

---

(1) *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, chap. XIII, p. 418, (15); p. 421, (19). Voir aussi KRONECKER, *Monatsberichte*, pp. 1168 et suiv.; 1881.

(2) Ce développement est donné par Halphen sous la forme

$$\frac{e^{\eta'\omega'}}{\sigma^2(\omega')}\,\frac{\sigma(u+v)}{\sigma_1(u)\sigma_1(v)}\,e^{\frac{-\eta uv}{\omega}} = -\frac{2\pi}{\omega}\sum_{m,n} q^{\frac{mn}{2}}\sin\frac{\pi}{2\omega}(nu+mv)$$

$$(m,\ n = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ +\infty);$$

on le ramène à la forme donnée d'abord par Kronecker au moyen des relations

$$\frac{e^{\frac{\eta'\omega'}{2}}}{\sigma(\omega')} = \frac{1}{2\omega i}\,\frac{\vartheta'_{11}(0)}{\vartheta_{01}(0)},$$

$$\sigma(u+v) = 2\omega\,\frac{\vartheta_{11}\left(\frac{u+v}{2\omega}\right)}{\vartheta'_{11}(0)}\,e^{\eta\frac{(u+v)^2}{\omega}}, \qquad \sigma_1(u) = \frac{\vartheta_{01}\left(\frac{u}{2\omega}\right)}{\vartheta_{01}(0)}\,e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}$$

[*Traité des fonctions elliptiques*, p. 250, (29); p. 251, (35)].

Ces conditions sont satisfaites quand u, v sont réels.

Prenons, par exemple, pour la fonction F dans (4) la fonction définie par

$$F(h) = [1 - (-1)^h] q^{\frac{h}{2}}, \qquad |q| < 1;$$

les séries convergent aux deux membres, et il vient

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{2\tau}{|\sqrt{D}|} \sum_{k_1, k_2} \sum_{\nu_1, \nu_2} \left(\frac{D_1}{k_1}\right)\left(\frac{D_2}{k_2}\right) q^{\frac{1}{2}\nu_1\nu_2} \sin 2\pi\left(\frac{k_1\nu_1}{|D_1|} + \frac{k_2\nu_2}{|D_2|}\right) \\ & \quad = \sum_{a, b, c} \left[\left(\frac{D_1}{A}\right) + \left(\frac{D_2}{A}\right)\right] \sum_{m, n} q^{\frac{1}{2}(am^2 + bmn + cn^2)} \\ & \qquad (\nu_1, \nu_2 = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots, \pm \infty) \end{aligned} \right.$$

ou

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\tau \vartheta'_{11}(0)}{2\pi|\sqrt{D}|} \sum_{k_1, k_2} \left(\frac{D_1}{k_1}\right)\left(\frac{D_2}{k_2}\right) \frac{\vartheta_{11}\left(\frac{2k_1}{|D_1|} + \frac{2k_2}{|D_2|}\right)}{\vartheta_{01}\left(\frac{2k_1}{D_1}\right)\vartheta_{01}\left(\frac{2k_2}{D_2}\right)} \\ & \quad = \sum_{a, b, c} \left[\left(\frac{D_1}{A}\right) + \left(\frac{D_2}{A}\right)\right] \sum_{m, n} q^{\frac{1}{2}(am^2 + bmn + cn^2)}, \end{aligned} \right.$$

$k_\alpha = 1, 2, 3, \ldots, |D_\alpha|$, $(\alpha = 1, 2)$; m, n parcourent tous les nombres positifs et négatifs pour lesquels $am^2 + bmn + cn^2$ est impair.

Si l'on compare cette formule avec la formule (11) du § 5, on voit qu'elle est une généralisation des sommes de Gauss, la fonction sinus étant remplacée par la fonction de deux variables

$$\frac{\vartheta_{11}(u + v)}{\vartheta_{01}(u)\vartheta_{01}(v)}.$$

Pour $D_2 = 1$, on obtient, en observant les égalités,

$$\vartheta_{01}\left(\frac{2k_2}{D_2}\right) = \vartheta_{01}(2) = \vartheta_{01}(0), \qquad \vartheta_{11}\left(\frac{2k_1}{|D_1|} + 2\right) = \vartheta_{11}\left(\frac{2k_1}{|D_1|}\right),$$

$$\vartheta'_{11}(0) = \pi\vartheta_{01}(0)\vartheta_{10}(0)\vartheta_{00}(0),$$

$$\frac{\vartheta_{11}(u)}{\vartheta_{01}(u)} = \frac{\vartheta_{10}(0)}{\vartheta_{00}(0)} \operatorname{sn} u,$$

$$(7)\qquad \frac{\tau\vartheta_{10}^2}{4|\sqrt{D}|} \sum_{k=1}^{k=|D|} \left(\frac{D}{k}\right) \operatorname{sn} \frac{2k}{|D|} = \sum_{a, b, c} \sum_{m, n} q^{\frac{1}{2}(am^2 + bmn + cn^2)},$$

où le premier membre est semblable à celui de la formule (11) du § 5, mais avec la fonction sn au lieu de la fonction sinus ([1]).

Si l'on divise (5) par q et qu'on intègre depuis $q = 0$, ce qui est permis, car les séries infinies sont absolument et uniformément convergentes pour $|q| < 1$ (on le voit en remplaçant le sinus par l'unité et en rangeant les termes de manière qu'ils ne croissent pas), on obtient

$$\frac{2\tau}{|\sqrt{D}|}\sum_{k_1, k_2}\sum_{\nu_1, \nu_2}\left(\frac{D_1}{k_1}\right)\left(\frac{D_2}{k_2}\right)\frac{q^{\frac{1}{2}\nu_1\nu_2}}{\nu_1\nu_2}\sin 2\pi\left(\frac{k_1\nu_1}{|D_1|}+\frac{k_2\nu_2}{|D_2|}\right)$$
$$= \sum_{a, b, c}\left[\left(\frac{D_1}{A}\right)+\left(\frac{D_2}{A}\right)\right]\sum_{m, n}\frac{q^{\frac{1}{2}(am^2+bmn+cn^2)}}{am^2+bmn+cn^2}$$

ou, d'après (6),

$$\frac{\tau}{4\pi|\sqrt{D}|}\int_0^q \frac{dq}{q}\mathfrak{I}'_{11}(0)\sum_{k_1, k_2}\left(\frac{D_1}{k_1}\right)\left(\frac{D_2}{k_2}\right)\frac{\mathfrak{I}_{11}\left(\frac{2k_1}{|D_1|}+\frac{2k_2}{|D_2|}\right)}{\mathfrak{I}_{01}\left(\frac{2k_1}{|D_1|}\right)\mathfrak{I}_{01}\left(\frac{2k_2}{|D_2|}\right)}$$
$$= \frac{\tau}{4\pi|\sqrt{D}|}\,\mathrm{I} = 2\sum_{a, b, c}\left(\frac{D_1}{A}\right)\sum_{m, n}\frac{q^{\frac{1}{2}(am^2+bmn+cn^2)}}{am^2+bmn+cn^2}.$$

Si l'on range les termes suivant les valeurs non décroissantes de $am^2 + bmn + cn^2$, on voit que le second membre est égal (§ 14) à

$$2\lim_{\rho=0}\sum_{a, b, c}\left(\frac{D_1}{A}\right)\sum_{m, n}\frac{q^{\frac{1}{2}(am^2+bmn+cn^2)}}{(am^2+bmn+cn^2)^{1+\rho}} = F(q, \rho);$$

et la quantité placée sous le signe *limite* est une série simple, entière en $q^{\frac{1}{2}}$, donc continue en q, et convergente pour $q = 1$ tant que ρ est > 0.

Posons maintenant

$$q^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{-\xi}{|\sqrt{D}|}}, \qquad \frac{a}{|\sqrt{D}|} = a_0, \qquad \frac{b}{|\sqrt{D}|} = b_0, \qquad \frac{c}{|\sqrt{D}|} = c_0,$$

([1]) Dirichlet avait déjà communiqué à Kronecker sans démonstration un cas particulier de la formule précédente dans une lettre datée de juillet 1858 [*Göttinger Nachrichten*, p. 361; 1885 (voir en particulier 8e lettre, p. 379)]. On voit par la réponse de Kronecker combien cette relation l'avait frappé.

ξ ayant sa partie réelle positive et a_0, b_0, c_0 étant réels. On aura, par une transformation déjà employée (§ 14, 2), en reprenant les notations du § 23,

$$F(q,\rho)=\sum_{a,b,c}\left(\frac{D_1}{A}\right)\frac{1}{\Gamma(1+\rho)}\int_0^\infty x^\rho\sum_{m,n}e^{-(x+\xi)f(m,n)}\,dx$$

$$=\sum_{a,b,c}\left(\frac{D_1}{A}\right)\frac{1}{\Gamma(1+\rho)}\left[\int_0^l\left(-1+\frac{2\pi}{x+\xi}+\frac{2\pi}{x+\xi}\sum_{m,n}e^{-\frac{4\pi^2}{x+\xi}f'(m,n)}\right)x^\rho\,dx\right.$$
$$\left.+\int_l^\infty x^\rho\sum_{m,n}e^{-(x+\xi)f(m,n)}\,dx\right],$$

$$l>0 \qquad [\S\ 23,\ (9)],$$

ou, puisque $\sum_{a,b,c}\left(\frac{D_1}{A}\right)=0$,

$$F(q,\rho)=\sum_{a,b,c}\left(\frac{D_1}{A}\right)\frac{1}{\Gamma(1+\rho)}\left[\int_0^l\frac{2\pi}{x+\xi}\sum_{m,n}e^{-\frac{4\pi^2}{x+\xi}f'(m,n)}x^\rho\,dx\right.$$
$$\left.+\int_l^\infty\sum_{m,n}e^{-(x+\xi)f(m,n)}x^\rho\,dx\right],$$

et l'on voit sur cette dernière expression que

$$\lim_{\xi=0}\lim_{\rho=0}F(q,\rho)=\lim_{\rho=0}\lim_{\xi=0}F(q,\rho).$$

Or on a trouvé (§ 18, fin)

$$\lim_{\rho=0}\sum_{a,b,c}\left(\frac{D_1}{a}\right)\sum_{m,n}(am^2+bmn+cn^2)^{-1-\rho}$$
$$=\tau H(D_1)H(D_2)=K(D_1)K(D_2)\frac{\log E(D_1)\log E(D_2)}{(\sqrt{D_1})(\sqrt{D_2})},$$

et l'on verra bientôt que

$$\tau H(D_1)H(D_2)$$
$$=\frac{2\pi}{|\sqrt{D}|}\sum_{a,b,c}\left(\frac{D_1}{a}\right)\log c\left[\vartheta'_{11}\left(0,\frac{-b+i|\sqrt{D}|}{2c}\right)\vartheta'_{11}\left(0,\frac{b+i|\sqrt{D}|}{2c}\right)\right]^{-\frac{2}{3}}.$$

Donc

$$\text{(8)}\qquad I=-8i\pi K(D_1)K(D_2)\log E(D_1)\log E(D_2),$$

ou à

$$\text{(9)}\qquad \frac{16\pi^2}{\tau}\sum_{a,b,c}\left(\frac{D_1}{a}\right)\log c\left[\vartheta'_{11}\left(0,\frac{-b+i|\sqrt{D}|}{2c}\right)\vartheta'_{11}\left(0,\frac{b+i|\sqrt{D}|}{2c}\right)\right]^{-\frac{2}{3}}.$$

§ 25. Expression des sommes de Gauss généralisées par les fonctions ϑ (¹).

La formule (7) du § 23 montre comment la série de Rosenhain

$$(1)\qquad \sum_{m,n}(-1)^{mn}e^{-(a_0m^2+b_0mn+c_0n^2)\pi+[m(2\sigma+1)+n(2\tau+1)]\pi i}$$

se réduit à l'expression

$$(2)\qquad \left(\sqrt{-(\omega_1+\omega_2)i}\right)e^{\tau^2(\omega_1+\omega_2)\pi i}\,\vartheta_{11}(\sigma+\tau\omega_1,\,w_1)\,\vartheta_{11}(\sigma-\tau\omega_2,\,w_2),$$

qui ne contient que des séries simples de Jacobi.

Il est naturel de chercher à ramener aussi aux séries ϑ la série double obtenue en enlevant au terme général de (1) le facteur $(-1)^{mn}$. Partons donc de

$$(3)\qquad \sum_{m,n}e^{-(a_0m^2+b_0mn+c_0n^2)\pi+2(m\sigma+n\tau)\pi i},\qquad m,\,n=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\ldots,$$

en rappelant les relations

$$a_0=\frac{-\omega_1\omega_2 i}{\omega_1+\omega_2},\qquad b_0=\frac{-i(\omega_1-\omega_2)}{\omega_1+\omega_2},\qquad c_0=\frac{i}{\omega_1+\omega_2},$$

$$\omega_1=\frac{-b_0+i}{2c_0},\qquad \omega_2=\frac{b_0+i}{2c_0},\qquad 4a_0c_0-b_0^2=1,$$

et appliquons la formule

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_n e^{\left(-\frac{n^2}{\omega}+2n\eta-n\right)\pi i}=\left(\sqrt{-\omega i}\right)\sum_\nu e^{\omega\pi i\left(\eta+\frac{\nu}{2}\right)}\\ (n=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\ldots,\quad \nu=\pm 1,\pm 3,\pm 5,\ldots)\end{array}\right.$$

[§ 23 (10)], en y faisant

$$2\eta=2\tau+\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1+\omega_2}m+1=2\tau+mb_0i+1,\qquad \omega=\omega_1+\omega_2;$$

(¹) KRONECKER, *Sitzungsberichte*, p. 312; 1889.

elle devient ainsi

$$\begin{aligned}
&\sum_n e^{(n^2 c_0 i + mnb_0 i + 2n\tau)\pi i}\\
&= \left(\sqrt{\frac{1}{c_0}}\right)\sum_\nu e^{(\omega_1+\omega_2)\pi i\left[\tau+\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1+\omega_2}\frac{m}{2}+\frac{\nu+1}{2}\right]^2}\\
&= \left(\sqrt{\frac{1}{c_0}}\right)\sum_\nu e^{(\omega_1+\omega_2)\pi i\left[\tau+\frac{m+\nu+1}{2}-\frac{m\omega_2}{\omega_1+\omega_2}\right]^2}\\
&= \left(\sqrt{\frac{1}{c_0}}\right)e^{-\frac{\tau^2\pi}{c_0}}\sum_\nu e^{\pi i\left[\frac{\omega_1+\omega_2}{4}(m+\nu+1)^2+\frac{m^2\omega_2^2}{\omega_1+\omega_2}+\tau(\omega_1+\omega_2)(m+\nu+1)-2m\tau\omega_2-m\omega_2(m+\nu+1)\right]}.
\end{aligned}$$

Il faut encore multiplier les deux membres par

$$e^{(a_0 i m^2 + 2\sigma m)\pi i} = e^{\left(\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_1+\omega_2}m^2+2\sigma m\right)},$$

ce qui donne

$$\sum_n e^{-(a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2)\pi + 2(m\sigma + n\tau)\pi i} = \left(\sqrt{\frac{1}{c_0}}\right)e^{-\frac{\tau^2\pi}{c_0}}\sum_\nu e^{\pi i[\varphi(\nu, m)]}$$

$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots; \qquad \nu = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots),$$

$$\begin{aligned}
\varphi(\nu, m) &= \frac{\omega_1+\omega_2}{4}(m+\nu+1)^2 + m^2\omega_2\\
&\quad + \tau(\omega_1+\omega_2)(m+\nu+1) - 2m\tau\omega_2 - m\omega_2(m+\nu+1) + 2\sigma m\\
&= \frac{\omega_1}{4}(m+\nu+1)^2 + \frac{\omega_2}{4}[(m+\nu+1)^2 - 4m(\nu+1)]\\
&\quad + (\sigma+\tau\omega_1)(m+\nu+1) + (\sigma-\tau\omega_2)(m-\nu-1)\\
&= \frac{\omega_1}{4}(m+\nu+1)^2 + \frac{\omega_2}{4}(m-\nu-1)^2\\
&\quad + (\sigma+\tau\omega_1)(m+\nu+1) + (\sigma-\tau\omega_2)(m-\nu-1).
\end{aligned}$$

En sommant alors par rapport à m, on obtient

$$\begin{aligned}
&\sum_{m,n} e^{-(a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2)\pi + 2(m\sigma + n\tau)\pi i}\\
&= \left(\sqrt{\frac{1}{c_0}}\right)e^{-\frac{\tau^2\pi}{c_0}}\sum_{m,n} e^{\pi i\left[\frac{\omega_1}{4}(m+\nu+1)^2+(\sigma+\tau\omega_1)(m+\nu+1)+\frac{\omega_2}{4}(m-\nu-1)^2+(\sigma-\tau\omega_2)(m-\nu-1)\right]}
\end{aligned}$$

$$(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \qquad \nu = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots).$$

On peut évidemment mettre au second membre $2n$ à la place de $\nu + 1$, n parcourant les valeurs $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$; alors

figurent à l'exposant du terme général les deux grandeurs $m+2n$, $m-2n$ qui sont congrues (mod 4). Posons donc

$$m+2n=4m'+r, \qquad m-2n=4n'+r;$$

en faisant parcourir à m', n' les valeurs $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, on obtient *tous les* termes où le reste commun de $m+2n$, $m-2n$ (mod 4) est r et il restera seulement à faire $r=0, 1, 2, 3$. Ainsi

$$\sum_{m,n} e^{-(a_0 m^2+b_0+mn+c_0 n^2)\pi+2(m\sigma+n\tau)\pi i}$$

$$=\left(\sqrt{\frac{1}{c_0}}\right)e^{-\frac{\tau^2\pi}{c_0}}\sum_{r=0}^{r=3}\sum_{m',n'} e^{\pi i\left[\frac{\omega_1}{4}(4m'+r)^2+(\sigma+\tau\omega_1)(4m'+r)+\frac{\omega_2}{4}(4n'+r)^2+(\sigma-\tau\omega_2)(4n'+r)\right]}$$

$$=\left(\sqrt{\frac{1}{c_0}}\right)e^{-\frac{\tau^2\pi}{c_0}}\sum_{r=0}^{r=3}\sum_{n} e^{\pi i\left[\frac{\omega_1}{4}(4n+r)^2+(\sigma+\tau\omega_1)(4n+r)\right]}\sum_{n} e^{\pi i\left[\frac{\omega_2}{4}(4n+r)^2+(\sigma-\tau\omega_2)(4n+r)\right]},$$

$$n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots.$$

Or, si l'on pose

$$\sum_{n} e^{\pi i\left[\frac{\omega}{4}(4n+r)^2+(\sigma+\tau\omega)(4n+r)\right]}=R_r(\sigma, \tau, \omega),$$

on voit que

$$(5)\quad\begin{cases} R_0(\sigma,\tau,\omega)=\vartheta_{00}[2(\sigma+\tau\omega), 4\omega], \\ R_2(\sigma,\tau,\omega)=\vartheta_{10}[2(\sigma+\tau\omega), 4\omega], \\ R_1(\sigma,\tau,\omega)=R_3(-\sigma,-\tau,\omega)=e^{\left(\frac{\omega}{4}+\sigma+\tau\omega\right)\pi i}\,\vartheta_{00}[2(\sigma+\tau\omega)+\omega, 4\omega]. \end{cases}$$

Donc

$$\sum_{m,n} e^{-(a_0 m^2+b_0 mn+c_0 n^2)\pi+2(m\sigma+n\tau)\pi i}$$

$$=\left(\sqrt{\frac{1}{c_0}}\right)e^{-\frac{\tau^2\pi}{c_0}}\sum_{r=0}^{r=3} R_r(\sigma,\tau,\omega_1)\,R_r(\sigma,-\tau,\omega_2)$$

$$\begin{aligned}=\left(\sqrt{\frac{1}{c_0}}\right)e^{-\frac{\tau^2\pi}{c_0}}\Big\{&\vartheta_{00}[2(\sigma+\tau\omega_1), 4\omega_1]\,\vartheta_{00}[2(\sigma-\tau\omega_2), 4\omega_2] \\ &+\vartheta_{10}[2(\sigma+\tau\omega_1), 4\omega_1]\,\vartheta_{10}[2(\sigma-\tau\omega_2), 4\omega_2] \\ &+\vartheta_{00}[2(\sigma+\tau\omega_1)+\omega_1, 4\omega_1]\,\vartheta_{00}[2(\sigma-\tau\omega_2)+\omega_2 . 4\omega_2]\,e^{\left[\frac{\omega_1+\omega_2}{4}+2\sigma+\tau(\omega_1-\omega_2)\right]\pi i} \\ &+\vartheta_{00}[2(-\sigma-\tau\omega_1)+\omega_1, 4\omega_1]\,\vartheta_{00}[2(-\sigma+\tau\omega_2)+\omega_2, 4\omega_2]\,e^{\left[\frac{\omega_1+\omega_2}{4}-2\sigma-\tau(\omega_1-\omega_2)\right]\pi i}\Big\}.\end{aligned}$$

Pour $\sigma = \tau = 0$, les formules (5) donnent

$$R_0(0, 0, \omega) = \mathfrak{S}_{00}(0, 4\omega),$$
$$R_2(0, 0, \omega) = \mathfrak{S}_{10}(0, 4\omega),$$
$$R_1(0, 0, \omega) = R_3(0, 0, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\omega\pi i}{4}(4n+1)^2},$$

et, comme on peut changer n en $-n$,

$$\begin{aligned} R_1(0, 0, \omega) &= R_3(0, 0, \omega) \\ &= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\omega\pi i}{4}(4n+1)^2} + \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\omega\pi i}{4}(4n-1)^2}\right] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\omega\pi i}{4}(2n+1)^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} q^{\frac{(2n+1)^2}{4}} = \frac{1}{2}\mathfrak{S}_{10}(0, \omega); \end{aligned}$$

donc

$$(6)\quad \begin{cases} \sum_{m,n} e^{-(a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2)\pi} \\ = \left(\sqrt{\frac{1}{c_0}}\right)[\mathfrak{S}_{10}(0, \omega_1)\mathfrak{S}_{10}(0, \omega_2) + \mathfrak{S}_{10}(0, 4\omega_1)\mathfrak{S}_{10}(0, 4\omega_2) + \mathfrak{S}_{00}(0, 4\omega_1)\mathfrak{S}_{00}(0, 4\omega_2)]. \end{cases}$$
$$m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots.$$

Si dans la formule (6) du § **24** on fait $q = e^{-\frac{2\pi}{|\sqrt{D}|}}$, on voit d'après cela qu'elle devient

$$\begin{aligned} &\frac{\tau\mathfrak{S}'_{11}\left(0, \frac{2\pi i}{|\sqrt{D}|}\right)}{2\pi|\sqrt{D}|}\sum_{k_1,k_2}\left(\frac{D_1}{k_1}\right)\left(\frac{D_2}{k_2}\right)\frac{\mathfrak{S}_{11}\left(\frac{2k_1}{|D_1|}+\frac{2k_2}{|D_2|}, \frac{2\pi i}{|\sqrt{D}|}\right)}{\mathfrak{S}_{01}\left(\frac{2k_1}{|D_1|}, \frac{2\pi i}{|\sqrt{D}|}\right)\mathfrak{S}_{01}\left(\frac{2k_2}{|D_2|}, \frac{2\pi i}{|\sqrt{D}|}\right)} \\ &= \sum_{a,b,c}\left[\left(\frac{D_1}{A}\right)+\left(\frac{D_2}{A}\right)\right]\sum_{m,n} e^{-\left(\frac{a}{|\sqrt{D}|}m^2 - \frac{b}{|\sqrt{D}|}mn + \frac{c}{|\sqrt{D}|}n^2\right)\pi i} \\ &= \sum_{a,b,c}\left[\left(\frac{D_1}{A}\right)+\left(\frac{D_2}{A}\right)\right]\left(\sqrt{\frac{|D|^{\frac{1}{2}}}{c}}\right)[\mathfrak{S}_{10}(0, \omega_1)\mathfrak{S}_{10}(0, \omega_2) \\ &\qquad + \mathfrak{S}_{10}(0, 4\omega_1)\mathfrak{S}_{10}(0, 4\omega_2) + \mathfrak{S}_{00}(0, 4\omega_1)\mathfrak{S}_{00}(0, 4\omega_2)]; \end{aligned}$$

$$\omega_1 = \frac{-b + i|\sqrt{D}|}{2c}, \qquad \omega_2 = \frac{b + i|\sqrt{D}|}{2c}; \qquad 4\frac{a}{|\sqrt{D}|}\frac{c}{|\sqrt{D}|} - \frac{b^2}{|\sqrt{D}|} = 1.$$
$$D_1 D_2 = D = b^2 - 4ac < 0.$$

DEUXIÈME PARTIE.

LA SECONDE FORMULE DE KRONECKER.

CHAPITRE VII.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

§ 26. Notion générale de l'invariance. Applications (¹).

Ayant à considérer, outre les invariants des classes de formes quadratiques arithmétiques, certains invariants plus généraux qui se rattachent étroitement à une formule fondamentale, j'ai pensé que des considérations abstraites, sur la notion de l'invariance, exposées par Kronecker lui-même dans le même Mémoire, ne seraient pas dépourvues d'intérêt. Aussi bien ces considérations mettront dans leur vrai jour la nature de certaines transformations effectuées précédemment et dont les résultats reviendront encore.

Sylvester a nommé *invariants* certaines fonctions des coefficients d'une forme algébrique qui conservent leur valeur lorsqu'on fait subir aux variables de la forme une substitution de déterminant 1. Mais on a donné depuis à cette notion d'invariance beaucoup plus d'ampleur. Appelons *équivalentes* ces formes algébriques, déduites les unes des autres par un procédé réciproque de transformation, qui est ici une substitution linéaire de déterminant 1; appelons de même *équivalence* cette relation réciproque qui les fait équivalentes, et leur ensemble une *classe*. Les fonctions de Sylvester sont des invariants de l'équivalence ou de

(¹) KRONECKER, *Sitzungsberichte*, p. 99; 1890.

la classe; mais on voit de suite que la notion d'équivalence peut et doit rester indépendante de telle relation réciproque qui la constitue dans un cas particulier aussi bien que de la nature des objets qu'elle rapproche.

Ainsi toute abstraction comporte une *classe* d'objets *équivalents* et la notion abstraite elle-même qui convient à chacun est un premier invariant de la classe; les propriétés qui en découlent en seront à leur tour autant d'autres. A ce point de vue, toute science, comme le fait remarquer Kronecker, tend à établir des équivalences et à déterminer leurs invariants.

On voit que le premier invariant d'une classe de formes algébriques

$$a_x^n = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_h x_h)^n,$$

équivalentes par substitution linéaire, serait, à ce compte, leur forme même a_x^n. Mais il importe de préciser davantage.

Désignons par (α) ou $(\alpha^{(i)})$ des systèmes de n grandeurs $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ et imaginons entre eux une équivalence quelconque, mais telle cependant que deux systèmes équivalents à un troisième le soient entre eux (¹); nous appellerons proprement *classe* l'ensemble des systèmes

$$(\alpha^{(1)}), \quad (\alpha^{(2)}), \quad (\alpha^{(3)}), \quad \ldots,$$

équivalents dans ces conditions. Toute fonction uniforme $J(\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \ldots, \alpha_n^{(i)})$ des éléments d'un système dont la valeur est constante dans toute la classe sera dite *invariant de la classe* ou *invariant de l'équivalence.*

Avec un nombre suffisant d'invariants $J_1, J_2, \ldots, J_\nu$, on pourra exprimer complètement les conditions de l'équivalence

$$(\alpha^{(1)}) \backsim (\alpha^{(2)})$$

par les ν équations

$$J_k(\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \ldots, \alpha_n^{(1)}) = J_k(\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \ldots, \alpha_n^{(2)}) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, \nu),$$

entre les éléments

$$\alpha_i^{(1)}, \quad \alpha_i^{(2)} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

(¹) Comparer KRONECKER, *Zur Theorie der allgemeinen complexen Zahlen und der Modulsysteme* (*Sitzungsberichte*, 1888).

Il est intéressant d'observer que tout invariant doit pouvoir se représenter comme fonction symétrique de tous les systèmes équi valents.

Ainsi l'équivalence

$$\alpha \backsim \alpha + 1$$

admet l'invariant $\pi \cot \pi\alpha$, et l'on voit que la relation

$$\pi \cot \pi\alpha = \pi \cot \pi\alpha',$$

exigeant

$$\alpha = \alpha' + k,$$

exprime complètement les conditions d'équivalence des deux éléments α, α'.

On sait d'ailleurs que

$$\pi \cot \pi\alpha = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{\alpha + n},$$

ce qui montre bien comment $\pi \cot \pi\alpha$ est fonction symétrique des éléments équivalents qui constituent la classe.

Définissons encore l'équivalence

$$(\alpha_{ik}) \backsim (\alpha'_{ik}) \qquad (i, k = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

de deux systèmes symétriques ($\alpha_{ki} = \alpha_{ik}$, $\alpha'_{ki} = \alpha'_{ik}$) par la condition que les deux formes quadratiques négatives

$$\sum_{ik} \alpha_{ik} z_i z_k, \quad \sum_{ik} \alpha'_{ik} z'_i z'_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

se transforment l'une dans l'autre par une substitution linéaire de déterminant 1 (c'est la généralisation de ce qui a été dit plus haut pour les formes quadratiques binaires arithmétiques). On sait que l'unique invariant de cette équivalence est le discriminant $|\alpha_{ik}|$ qu'il s'agit de représenter comme une fonction symétrique de tous les systèmes (α_{ik}) d'une classe. Pour y arriver, évaluons l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi \sum^{i,k} \alpha_{ik} z_i z_k} dz_1\, dz_2 \ldots dz_n \qquad (i, k = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

qui manifestement est une fonction symétrique de tous les systèmes

(α_{ik}) d'une même classe, car on a

$$e^{\pi\sum^{i,k}\alpha_{ik}z_iz_k}dz_1\dots dz_n = e^{\pi\sum^{i,k}\alpha'_{ik}z'_iz'_k}dz'_1\dots dz'_n.$$

On peut toujours ramener une forme quadratique à une somme algébrique de carrés par une substitution orthogonale (c'est-à-dire du déterminant ± 1, ici $+1$) quand le discriminant est $\neq 0$. Les coefficients des carrés sont alors les racines de l'équation en s et sont par conséquent ici tous négatifs, la forme étant négative. Soient $-s$ ces racines; on aura

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi\sum^{i,k}\alpha_{ik}z_iz_k}dz_1\dots dz_n$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\sum s_iu_i^2}du_1\dots du_n$$
$$=\prod_{i=1}^{i=n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi s_iu_i^2}du_i=\prod_{i=1}^{i=n}\left|\sqrt{\frac{1}{s_i}}\right|.$$

Or le discriminant de $-\Sigma s_iu_i^2$ est

$$\begin{vmatrix} -s_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -s_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -s_3 & \dots \\ . & 0 & \dots & \dots \end{vmatrix} = (-1)^n\prod_{i=1}^{i=n}s_i = |\alpha_{ik}|.$$

Donc

$$|\alpha_{ik}| = (-1)^n\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi\sum^{i,k}\alpha_{ik}z_iz_k}dz_1\dots dz_n\right]^{-2}.$$

Remarquons aussi que (α_{ik}), (α'_{ik}) étant deux systèmes de coefficients de deux formes quadratiques dont l'une est déduite de l'autre par substitution linéaire, l'égalité des deux discriminants $|\alpha_{ik}| = |\alpha'_{ik}|$ exprime que le déterminant de la substitution $=\pm 1$, c'est-à-dire exprime, mais imparfaitement, les conditions de l'équivalence. Ainsi la nature de la question conduit à admettre les deux sortes d'équivalence que nous avions précédemment distinguées par les noms de *propre* et d'*impropre* (§ 6).

Nous aurons plusieurs fois à considérer l'équivalence simultanée de deux formes algébriques

$$\sigma x + \tau y, \qquad \sigma' x' + \tau' y',$$
$$a_0 x^2 + b_0 xy + c_0 y^2, \qquad a'_0 x'^2 + b'_0 x'y' + c'_0 y'^2,$$

au sens précédent, σ', τ', a'_0, b'_0, c'_0 étant ce que deviennent σ, τ, a_0, b_0, c_0, quand on fait

$$\begin{matrix} x = \alpha x' + \beta y' \\ y = \alpha' x' + \beta' y' \end{matrix} \qquad (\alpha\beta' - \beta\alpha' = 1)\ ([1]).$$

et de plus σ, τ pouvant indifféremment être augmentés de nombres entiers; cela revient évidemment à l'équivalence unique

$$(1) \qquad (\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0) \backsim (\sigma' \tau', a'_0, b'_0, c'_0),$$

définie par les conditions

$$(2) \quad \begin{cases} \sigma' = \alpha\sigma + \alpha'\tau + \alpha'', \quad \tau' = \beta\sigma + \beta'\tau + \beta'', \quad \alpha\beta' - \beta\alpha' = 1, \\ a'_0 = a_0\alpha^2 + b_0\alpha\alpha' + c_0\alpha'^2, \\ b'_0 = 2a_0\alpha\beta + b_0(\alpha\beta' + \beta\alpha') + 2c_0\alpha'\beta', \\ c'_0 = a_0\beta^2 + b_0\beta\beta' + c_0\beta'^2, \end{cases}$$

α, α', α'', β, β', β'' étant entiers. Alors, si ω_1, $-\omega_2$ sont les racines de

$$a_0 + b_0\omega + c_0\omega^2 = 0,$$

donc

$$\omega_1 = \frac{-b_0 + i}{2c_0}, \qquad \omega_2 = \frac{b_0 + i}{2c_0} \qquad (4a_0c_0 - b_0^2 = 1),$$

et ω'_1, $-\omega'_2$ de

$$a'_0 + b'_0\omega' + c'_0\omega'^2 = 0,$$

donc

$$\omega'_1 = \frac{-b'_0 + i}{2c'_0}, \qquad \omega'_2 = \frac{b'_0 + i}{2c'_0} \qquad (4a'_0c'_0 - b'^2_0 = 1),$$

on aura

$$\omega_1 = \frac{\alpha' + \beta'\omega'_1}{\alpha + \beta\omega'_1}, \qquad \omega'_1 = \frac{-\alpha' + \alpha\omega_1}{\beta' - \beta\omega_1}$$

$$\frac{\sigma + \tau\omega_1}{\beta - \beta\omega_1} = \sigma' + \tau'\omega_1 - \alpha'' - \beta''\omega'_1.$$

Si, dans la transformation $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix}$, et par conséquent aussi dans son inverse $\begin{pmatrix} \beta' & -\beta \\ -\alpha' & \alpha \end{pmatrix}$, le deuxième et le troisième coefficient sont pairs, c'est-à-dire si β, α' sont pairs, nous dirons que l'équivalence (1) est *complète* ([2]).

([1]) A cause de la présence simultanée de deux formes il est avantageux pour la symétrie de remplacer γ, δ par α', β'.

([2]) Voir KRONECKER, *Ueber bilineare Formen mit vier Variabeln* (*Abhandlungen der Akademie*, 1883).

La transformation faite au § 23 de l'expression

$$\left(\sqrt{-(\omega_1+\omega_2)i}\right) e^{\tau^2(\omega_1+\omega_2)\pi i}\,\mathfrak{I}(\sigma+\tau\omega_1,\omega_1)\,\mathfrak{I}(\sigma-\tau\omega_2,\omega_2) = \frac{1}{(\sqrt{c_0})}\,\mathrm{P}(\sigma,\tau,\omega_1,\omega_2)$$

en

$$(3)\quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{m,n} (-1)^{mn+m+n}\, e^{-(a_0m^2+b_0mn+c_0n^2)+2(m\sigma+n\tau)\pi i} \\ \qquad\qquad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots), \end{array}\right.$$

peu avantageuse au premier aspect, avait pour but de mettre en évidence son caractère invariant en la présentant comme fonction symétrique de tous les systèmes d'une classe. On a, en effet,

$$(4)\quad \left\{ \begin{array}{l} (-1)^{mn+m+n}\, e^{-(a'_0m^2+b'_0mn+c'_0n^2)+2(m\sigma'+n\tau')\pi i} \\ = (-1)^{mn+m+n}\, e^{-[a_0(\alpha m+\beta n)^2+b_0(\alpha m+\beta n)(\alpha' m+\beta' n)+c_0(\alpha' m+\beta' n)^2]+2[\sigma(\alpha m+\beta n)+\tau(\alpha' m+\beta' n)]\pi i}. \end{array}\right.$$

Si l'on pose

$$\alpha\, m+\beta\, n = m', \qquad \alpha'\, m+\beta'\, n = n',$$

d'où

$$m = \beta' m' - \beta n', \qquad n = \alpha' m' + \alpha n',$$

on voit qu'à chaque couple d'entiers m, n répond un couple d'entiers m', n' et réciproquement, et que, m, n parcourant les valeurs $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, m', n' les parcourront aussi. Donc le second membre de (4) sera un terme de (3) si la congruence

$$mn+m+n \equiv m'n'+m'+n' \pmod 2$$

est vérifiée. Or cela résulte immédiatement de ce que $mn+m+n$ (mod 2) n'est pas altéré par les substitutions élémentaires (m, n), $(-n, m)$ et $(m, n)(m, m+n)$. On peut aussi vérifier directement que

$$(\beta' m' - \beta n')(-\alpha' m' + \alpha n') + (\beta' m' - \beta n') + (-\alpha' m' + \alpha n') \equiv m'n' + m' + n' \pmod 2,$$

car, d'après $\alpha\beta' - \beta\alpha' = 1$ et $m'^2 \equiv m'$, $n'^2 \equiv n'$ (mod 2), on a

$$(\beta' m' - \beta n')(-\alpha' m' + \alpha n') \equiv -\beta'\alpha' m' - \alpha\beta' n' + m'n' \pmod 2,$$

et il reste à voir que

$$m'(\beta'+1)(-\alpha'+1) + n'(-\beta+1)(\alpha+1) \equiv 0 \pmod 2;$$

or, α' et β' comme α et β ne pouvant être pairs à la fois, les coefficients de m' et de n' sont tous deux pairs.

On vérifie de même que la transformation [§ 23, (12)] de

$$\frac{1}{4\pi^2(\sqrt{c_0})}(a_0 P_{11} + b_0 P_{12} + c_0 P_{12}) = \frac{\vartheta'(o, \omega_1)\vartheta'(o, \omega_2)}{4\pi^2(\sqrt{c_0})^3}$$

en

$$\sum(-1)^{(m-1)(n-1)}(a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2)\, e^{-\pi(a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2)}$$

$$= -\sum(-1)^{mn+m+n}(a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2) e^{-\pi(a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2)}$$

n'est autre que la réduction de cet invariant à sa forme essentielle.

Inversement, on peut se proposer de ramener une fonction symétrique des systèmes d'une classe, autrement dit un invariant sous sa forme essentielle, à des fonctions connues. C'est ce que nous avons fait au paragraphe précédent en exprimant

$$\sum_{m,n} e^{-(a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2)\pi + 2(m\sigma + n\tau)\pi i},$$

par les fonctions ϑ.

J'emprunte enfin à Kronecker un exemple plus étendu mais fort intéressant par lui-même et mettant très bien en lumière les considérations générales qui précèdent.

Il faut d'abord introduire la nouvelle fonction elliptique El définie par

$$(5) \qquad \mathrm{El}(\zeta, \omega) = \frac{\vartheta_{11}(2\zeta, 2\omega)}{\vartheta_{01}(2\zeta, 2\omega)} \text{ (1)},$$

d'où, en introduisant les notations de Jacobi (2),

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{El}(\zeta, \omega)}{\mathrm{El}\left(\frac{1}{4}, \omega\right)} = \mathrm{sn}(4\zeta K, \varkappa), \\ \sqrt{\varkappa} = \mathrm{El}\left(\frac{1}{4}, \omega\right), \qquad 2K = \pi\vartheta_{00}^2(o, 2\omega), \qquad 2\omega = \dfrac{iK'}{K}. \end{cases}$$

---

(1) KRONECKER, *Sitzungsberichte*, p. 713; 1886.

(2) Voir, par exemple, l'ouvrage de M. Weber, *Elliptische Functionen und algebraische Zahlen*, §§ 18, 37.

Ainsi l'on aura pour El les relations fondamentales

$$(7)\quad \mathrm{El}\left(\zeta+\frac{1}{2},\omega\right)=-\mathrm{El}(\zeta,\omega),\qquad \mathrm{El}\left(\zeta+\frac{\omega}{2},\omega\right)=\frac{1}{\mathrm{El}(\zeta,\omega)},$$

$$(8)\quad \mathrm{El}(\zeta+m+n\omega)=\mathrm{El}(\zeta,\omega)\ (^1).$$

Pour obtenir la formule de transformation de El, partons de [2]

$$(9)\quad \frac{\vartheta_{11}(\zeta',\omega')}{\vartheta_{01}(\zeta',\omega')}=i^{\delta+\gamma-1-\frac{\gamma\delta}{2}}\frac{\vartheta_{11}(\zeta,\omega)}{\vartheta_{01}(\zeta,\omega)}$$

où

$$(10)\quad \omega'=\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega},\qquad \zeta'=\frac{\zeta}{\alpha+\beta\omega}=(\delta-\beta\omega')\zeta,$$

$$(11)\quad \alpha\delta-\beta\gamma=1,\qquad \gamma\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2).$$

Cela posé, considérons une transformation quelconque où le nouveau rapport des périodes ω' soit lié à l'ancien ω par

$$\omega'=\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega},\qquad \alpha\delta-\beta\gamma=1.$$

Si β est pair, $\beta=2\beta'$, posons $\gamma'=2\gamma$; on aura

$$2\omega'=\frac{\gamma'+\delta.2\omega}{\alpha+\beta'.2\omega},\qquad \alpha\delta-\beta'\gamma'=1.$$

Soit alors

$$2\zeta'=\frac{2\zeta}{\alpha+\beta'.2\omega};$$

la formule (9) donnera

$$\frac{\vartheta_{11}(2\zeta',2\omega')}{\vartheta_{01}(2\zeta',2\omega')}=i^{\delta+\gamma'-1-\frac{\gamma'\delta}{2}}\frac{\vartheta_{11}(2\zeta,2\omega)}{\vartheta_{01}(2\zeta,2\omega)},$$

c'est-à-dire, en remettant β, γ au lieu de β', γ',

$$(12)\quad \mathrm{El}\left(\frac{\zeta}{\alpha+\beta\omega},\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right)=i^{\delta+2\gamma-\gamma\delta-1}\,\mathrm{El}(\zeta,\omega)\qquad \gamma\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$$

---

(1) Si $\mathrm{El}(\zeta,\omega)=\mathrm{El}(u,\omega)$, on a, d'après (6),

$$\mathrm{sn}(4\zeta K,2\omega)=\mathrm{sn}(4uK,2\omega),$$

donc (Halphen, t. I, p. 48)

$$4\zeta K=\begin{cases}4uK+4mK+2n.2iK',\\ -4uK+(4m+2)K+2n.2iK',\end{cases}\qquad \zeta=\begin{cases}u+m+n\omega,\\ \frac{1}{2}-u+m+n\omega.\end{cases}$$

(2) Voir H. WEBER, *Elliptische Functionen und algebraische Zahlen*, § 34.

ou

$$\text{(13)} \qquad \mathrm{El}\,[(\delta - \beta\omega')\zeta, \omega'] = i^{\delta+2\gamma-\gamma\delta-1}\,\mathrm{El}(\zeta, \omega).$$

Revenons maintenant aux notations (2) et supposons une équivalence complète, c'est-à-dire $\alpha' \equiv \beta \equiv 0 \pmod 2$.

Si dans l'équation (12) on remplace

$$\omega, \quad \alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta$$

respectivement par

$$\frac{\omega_1}{2}, \quad \beta', \quad -2\beta, \quad -\frac{\alpha'}{2}, \quad \alpha,$$

$$\alpha' \equiv 0 \pmod 2; \qquad \alpha\beta' - \beta\alpha' = 1,$$

elle devient

$$\mathrm{El}\left(\frac{\zeta}{\beta' - \beta\omega_1}, \frac{-\frac{\alpha'}{2} + \alpha\frac{\omega_1}{2}}{\beta' - \beta\omega_1}\right) = i^{\alpha - \alpha' + \frac{\alpha\alpha'}{2} - 1}\,\mathrm{El}\left(\zeta, \frac{\omega_1}{2}\right)$$

ou

$$\mathrm{El}\left(\frac{\zeta}{\beta' - \beta\omega_1}, \frac{\omega'_1}{2}\right) = i^{\frac{\alpha\alpha'}{2} + \alpha - \alpha' - 1}\,\mathrm{El}\left(\zeta, \frac{\omega_1}{2}\right),$$

d'où, pour $2\zeta = \sigma + \tau\omega_1$,

$$\mathrm{El}\left(\frac{\sigma' + \tau'\omega'_1}{2} - \frac{\alpha''}{2} - \beta''\frac{\omega'_1}{2}, \frac{\omega'_1}{2}\right) = i^{\frac{\alpha\alpha'}{2} + \alpha - \alpha' - 1}\,\mathrm{El}\left(\frac{\sigma + \tau\omega_1}{2}, \frac{\omega_1}{2}\right)$$

ou, d'après (7), (8),

$$\text{(14)} \qquad (-1)^{\alpha''}\,\mathrm{El}\left(\frac{\sigma' + \tau'\omega'_1}{2}, \frac{\omega'_1}{2}\right) = i^{\frac{\alpha\alpha'}{2} + \alpha - \alpha' - 1}\,\mathrm{El}\left(\frac{\sigma + \tau\omega_1}{2}, \frac{\omega_1}{2}\right),$$

$$\text{(15)} \qquad \mathrm{El}^4\left(\frac{\sigma + \tau\omega_1}{2}, \frac{\omega_1}{2}\right) = \mathrm{El}^4\left(\frac{\sigma' + \tau'\omega'_1}{2}, \frac{\omega'_1}{2}\right).$$

Donc $\mathrm{El}^4\left(\frac{\sigma + \tau\omega_1}{2}, \frac{\omega_1}{2}\right)$ est un invariant de l'équivalence complète

$$(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0) \backsim (\sigma', \tau', a'_0, b'_0, c'_0),$$

où nous supposerons désormais que les éléments sont *réels* (et toujours $4a_0c_0 - b_0^2 = 4a'_0c'_0 - b'^2_0 = 1$).

Il est facile de donner à cet invariant la forme *essentielle*, c'est-à-dire de le représenter comme fonction symétrique de tous les

systèmes d'une classe. On a trouvé en effet [§ 23 (8)]

$$(16)\quad \begin{cases} e^{\tau^2(\omega_1+\omega_2)\pi i}\mathfrak{I}_{11}(\sigma+\tau\omega_1,\omega_1)\mathfrak{I}_{01}(\sigma-\tau\omega_2,\omega_2) \\ \quad = (\sqrt{c_0})\sum_{\nu,n}(-1)^n i^{-(n+1)\nu} e^{-\pi f\left(\frac{\nu}{2},n\right)+2\left(\frac{\nu\sigma}{2}+n\tau\right)\pi i} \\ (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots;\quad \nu=\pm 1,\ \pm 3,\ \pm 5,\ \ldots). \end{cases}$$

D'ailleurs

$$(17)\quad \begin{cases} e^{\tau^2(\omega_1+\omega_2)\pi i}\mathfrak{I}_{01}(\sigma+\tau\omega_1,\omega_1)\mathfrak{I}_{01}(\sigma-\tau\omega_2,\omega_2) \\ \quad = e^{\left(\tau+\frac{1}{2}\right)^2(\omega_1+\omega_2)\pi i}\mathfrak{I}_{11}\left[\sigma+\left(\tau+\frac{1}{2}\right)\omega_1,\omega_1\right]\mathfrak{I}_{11}\left[\sigma-\left(\tau+\frac{1}{2}\right)\omega_2,\omega_2\right], \end{cases}$$

et, d'après la formule (7) du § 23,

$$= (\sqrt{c_0})\sum_{m,n}(-1)^{m(n-1)} e^{-\pi f(m,n)+2(m\sigma+n\tau)\pi i}$$
$$(m,\ n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots);$$

on obtient donc par division

$$(18)\quad \begin{cases} \mathrm{El}\left(\frac{\sigma+\tau\omega_1}{2},\frac{\omega_1}{2}\right) \\ \quad = \dfrac{\sum_{\nu,n}(-1)^n i^{-\nu(n+1)} e^{-\pi f\left(\frac{\nu}{2},n\right)+2\left(\frac{\nu\sigma}{2}+n\tau\right)\pi i}}{\sum_{m,n}(-1)^{m(n-1)} e^{-\pi f(m,n)+2(m\sigma+n\tau)\pi i}},\qquad \omega_1=\dfrac{-b_0+i}{2c_0} \\ (m,\ n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots;\quad \nu=\pm 1,\ \pm 3,\ \pm 5,\ \ldots). \end{cases}$$

On aurait le développement de $\mathrm{El}\left(\frac{\sigma+\sigma\omega_2}{2},\frac{\omega_2}{2}\right)$ en changeant b_0 en $-b_0$. Récrivons cette formule en modifiant un peu les notations

$$(19)\quad \begin{cases} \mathrm{El}\left(\frac{\sigma+\tau\omega_1}{2},\frac{\omega_1}{2}\right) \\ \quad = \dfrac{\sum_{r=-\infty}^{r=+\infty}\sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} i^{(2r+1)(s-1)} e^{-\pi\left[a_0\left(r+\frac{1}{2}\right)^2+b_0\left(r+\frac{1}{2}\right)s+c_0 s^2\right]+[(2r+1)\sigma+2s\tau]\pi i}}{\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} i^{m(n-1)} e^{-\pi(a_0m^2+b_0mn+c_0n^2)+2(m\sigma+n\tau)\pi i}}, \end{cases}$$

et montrons qu'un terme quelconque de chaque série se change en un autre quand on remplace un système $(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$ par un autre équivalent $(\sigma', \tau', a'_0, b'_0, c'_0)$. Si l'on pose, en effet,

$$\alpha\left(r+\frac{1}{2}\right)+\beta s = r'+\frac{1}{2}, \qquad \alpha'\left(r+\frac{1}{2}\right)+\beta' s = s',$$
$$\alpha m+\beta n = m', \qquad \alpha' m+\beta' n = n',$$

les conditions (2) donneront

$$a'_0\left(r+\frac{1}{2}\right)^2+b'_0\left(r+\frac{1}{2}\right)s+c'_0 s^2 = a_0\left(r'+\frac{1}{2}\right)^2+b_0\left(r^2+\frac{1}{2}\right)s'+c_0 s'^2,$$
$$\left(r+\frac{1}{2}\right)\sigma'+s\tau' = \left(r'+\frac{1}{2}\right)(\sigma+\alpha'')+s'(\tau+\beta''),$$
$$i^{(2r+1)(s-1)} = i^{(2r'+1)(s'-1)}\, i^{\frac{\alpha\alpha'}{2}+\alpha-\alpha'-1},$$
$$a'_0 m^2+b'_0 mn+c'_0 n^2 = a_0 m'^2+b_0 m'n'+c_0 n'^2,$$
$$m\sigma'+n\tau' = m(\sigma+\alpha'')+n(\tau+\beta''),$$
$$(-1)^{m(n-1)} = (-1)^{m'(n'-1)}.$$

Donc, lorsque dans (19) on remplace $\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0$ par $\sigma', \tau', a'_0, b'_0, c'_0$, chaque terme (r, s) ou (m, n) est remplacé par un autre (r', s') ou (m', n'), et le numérateur est multiplié par $(-1)^{\alpha''} i^{\frac{\alpha\alpha'}{2}+\alpha-\alpha'-1}$, d'où l'équation (14).

Si, au dénominateur de (19), on remplace $e^{2\pi i(m\sigma+n\tau)}$ par

$$\cos 2\pi(m\sigma+n\tau)+i\sin 2\pi(m\sigma+n\tau),$$

les sinus se détruisent, et il reste

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-1)^{m(n-1)}e^{-\pi(a_0 m^2+b_0 mn+c_0 n^2)}\cos 2\pi(m\sigma+n\tau)$$
$$= \mathrm{E}_0(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0) = \mathrm{E}_0(\sigma, \tau).$$

Si de même, au numérateur, on fait

$$e^{[(2r+1)\sigma+2s\tau]\pi i} = \cos[(2r+1)\sigma+2s\tau]\pi+i\sin[(2r+1)\sigma+2s\tau]\pi,$$

les termes $(2r+1, s)$ et $(-2r-1, -s)$ réunis donnent, pour s pair

$$2(-1)^{\frac{s}{2}+r}\sin[(2r+1)\sigma+2s\tau]\pi,$$

pour s impair

$$2(-1)^{\frac{s-1}{2}}i\sin[(2r+1)\sigma+2s\tau]\pi.$$

et, comme ces deux expressions ne changent pas quand on remplace simultanément r par $-r-1$, s par $-s$, on peut écrire le numérateur considéré

$$E_1(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0) + i E_2(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0),$$

en posant

$$E_1(\sigma, \tau) = E_1(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$$
$$= \sum_{\mu, n} (-1)^{\frac{\mu-1}{2}+n} e^{-\pi\left(a_0 \frac{\mu^2}{4} + b_0 \mu n + 4 c_0 n^2\right)} \sin(\mu\sigma + 4n\tau)\pi,$$

$$E_2(\sigma, \tau) = E_2(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$$
$$= \sum_{\mu, \nu} (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} e^{-\pi\left(a_0 \frac{\mu^2}{4} + b_0 \frac{\mu\nu}{2} + c_0 \nu^2\right)} \sin(\mu\sigma + 2\nu\tau)\pi$$

$$(\mu, \nu = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots).$$

Ainsi

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{El}\left(\frac{\sigma + \tau\omega_1}{2}, \frac{\omega_1}{2}\right) = \frac{E_1(\sigma, \tau)}{E_0(\sigma, \tau)} + i \frac{E_2(\sigma, \tau)}{E_0(\sigma, \tau)}, \qquad \omega_1 = \frac{-b_0 + i}{2c_0}, \\ &\mathrm{El}\left(\frac{1}{4}, \frac{\omega}{2}\right) = \frac{E_1\left(\frac{1}{2}, 0\right)}{E_0\left(\frac{1}{2}, 0\right)} + i \frac{E_2\left(\frac{1}{2}, 0\right)}{E_0\left(\frac{1}{2}, 0\right)}, \end{aligned} \right.$$

en posant

$$E_0\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \sum_{m, n} (-1)^{mn} e^{-\pi(a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2)},$$

$$E_1\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \sum_{\mu, n} (-1)^n e^{-\pi\left(a_0 \frac{\mu^2}{4} + b_0 \mu n + 4 c_0 n^2\right)},$$

$$E_2\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \sum_{\mu, \nu} (-1)^{\frac{\mu+\nu}{2}} e^{-\pi\left(a_0 \frac{\mu^2}{4} + b_0 \frac{\mu\nu}{2} + c_0 \nu^2\right)}$$

$$(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots; \qquad \mu, \nu = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots).$$

Pour $\sigma = \frac{1}{2}$, $\tau = 0$ on obtient

$$\sigma' = \frac{\alpha}{2} + \alpha'', \qquad \tau' = \frac{\beta}{2} + \beta''$$

et

$$\mathrm{El}\left(\frac{\sigma' + \tau'\omega_1'}{2}, \frac{\omega_1'}{2}\right) = \mathrm{El}\left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha''}{2} + \frac{\beta\omega_1'}{4} + \frac{\beta''\omega_1'}{2}, \frac{\omega_1'}{2}\right);$$

or, comme d'après (7), (8) $\left(\omega \text{ étant remplacé par } \frac{\omega}{2}\right)$

$$\mathrm{El}\left(\zeta + \frac{m}{2} + \frac{n\omega}{2}, \frac{\omega}{2}\right) = (-1)^m \mathrm{El}\left(\zeta, \frac{\omega}{2}\right),$$

on conclut, β étant pair, que

$$\mathrm{El}\left(\frac{\sigma' + \tau'\omega'_1}{2}, \frac{\omega'_1}{2}\right) = (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}+\alpha''} \mathrm{El}\left(\frac{1}{4}, \frac{\omega'_1}{2}\right)$$
$$\left(\sigma' = \frac{\alpha}{2} + \alpha'', \ \tau' = \frac{\beta}{2} + \beta''\right)$$

et (14) devient

$$\mathrm{El}\left(\frac{1}{4}, \frac{\omega'_1}{2}\right) = (-1)^{\frac{\alpha'}{2}} i^{\frac{\alpha\alpha'}{2}} \mathrm{El}\left(\frac{1}{4}, \frac{\omega_1}{2}\right). \tag{21}$$

Donc $\mathrm{El}^4\left(\frac{1}{4}, \frac{-b_0+i}{4c_0}\right)$ est un invariant des classes de systèmes (a'_0, b'_0, c'_0) qui sont complètement équivalentes à (a_0, b_0, c_0), les conditions d'équivalence complète étant

$$a'_0 = a_0\alpha^2 + b_0\alpha\alpha' + c_0\alpha'^2,$$
$$b'_0 = 2a_0\alpha\beta + b_0(\alpha\beta' + \beta\alpha') + 2c_0\alpha'\beta',$$
$$c'_0 = a_0\beta^2 + b_0)\beta\beta' + c_0\beta'^2,$$
$$\alpha\beta' - \beta\alpha' = 1, \qquad \alpha' \equiv \beta \equiv 0 \pmod 2, \qquad \text{donc} \qquad \alpha \equiv \beta' \equiv 1 \pmod 2.$$

Inversement l'invariant

$$\mathrm{El}^4\left(\frac{1}{4}, \frac{-b_0+i}{4c_0}\right) = \varkappa^2\left(\frac{-b_0+i}{2c_0}\right)$$

est caractéristique de l'équivalence en question, c'est-à-dire que l'égalité

$$\varkappa^2\left(\frac{-b_0+i}{2c_0}\right) = \varkappa^2\left(\frac{-b'_0+i}{2c'_0}\right), \qquad 4a_0c_0 - b_0^2 = 4a'_0c'_0 - b'^2_0 = 1$$

entraîne l'équivalence *complète*

$$(a_0, b_0, c_0) \backsim (a'_0, b'_0, c'_0),$$

ou que l'égalité

$$\varkappa^2(\omega) = \varkappa^2(\omega'), \qquad \left(\omega = \frac{-b_0+i}{2c_0}, \quad \omega' = \frac{-b'_0+i}{2c'_0}\right)$$

entraîne la relation

$$(22)\qquad \begin{cases} \omega = \dfrac{\alpha + \beta\omega'}{\alpha' + \beta'\omega'}, \qquad \dfrac{-\alpha' + \alpha\omega}{\beta' - \beta\omega}, \\ \alpha' \equiv \beta \equiv 0 \pmod 2); \end{cases}$$

[de (22) on déduit comme au § 8 que la forme

$$(a_0\alpha' + b_0\alpha\alpha' + c_0\alpha'^2,\quad 2a_0\alpha\beta + b_0(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + 2c_0\alpha'\beta',\quad a_0\beta^2 + b_0\beta\beta' + c_0\beta'^2)$$

a pour racines

$$\frac{-b'_0 + i}{2c'_0} = \omega' \qquad \text{et} \qquad \frac{-b'_0 - i}{2c'_0}$$

et par conséquent qu'elle est identique à (a'_0, b'_0, c'_0) puisque les discriminants sont égaux].

On trouvera de la relation (22) une preuve plus simple que celle de Kronecker ([1]) dans l'Ouvrage de M. Weber, *Elliptische Functionen und algebraischen Zahlen*, § 47. J'ajouterai seulement avec Kronecker la remarque suivante : α' étant pair, on a ici, d'après (21),

$$\mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{-b_0 + i}{2c_0}\right) = (-1)^{\frac{\alpha'}{2}}\, \mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{-b'_0 + i}{2c'_0}\right).$$

Donc la relation

$$\mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{-b_0 + i}{2c_0}\right) = \mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{-b'_0 + i}{2c'_0}\right)$$

est *caractéristique* de l'équivalence

$$(a, b_0, c_0) \backsim (a'_0, b'_0, c'_0),$$

définie par

$$(23)\qquad \begin{cases} a'_0 = a_0\alpha^2 + b_0\alpha\alpha' + c_0\alpha'^2, \\ b'_0 = 2a_0\alpha\beta + b_0(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + 2c_0\alpha'\beta', \\ c'_0 = a_0\beta^2 + b_0\beta\beta' + c_0\beta'^2, \\ \beta \equiv \pmod 2), \qquad \alpha' \equiv 0 \pmod 4). \end{cases}$$

J'appellerai, pour abréger, cette équivalence *plus que complète*.

([1]) Voir KRONECKER, *Sitzungsberichte*, p. 112; 1890, p. 752-758; 1886. — FUCHS, *Sur quelques propriétés des intégrales des équations différentielles auxquelles satisfont les modules de périodicité des intégrales elliptiques des deux premières espèces* (*Journal de Crelle*, t. 83).

Supposons maintenant qu'entre les deux systèmes de grandeurs réelles

$$\sigma,\ \tau,\ a_0,\ b_0,\ c_0;\quad \sigma_1,\ \tau_1,\ a'_0,\ b'_0,\ c'_0$$

existent les deux relations

$$(24)\qquad \begin{cases} \mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{\omega}{2}\right) = \mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{\omega'}{2}\right), \\ \mathrm{El}^2\left(\frac{\sigma+\tau\omega}{2}, \frac{\omega}{2}\right) = \mathrm{El}^2\left(\frac{\sigma_1+\tau_1\omega'}{2}, \frac{\omega'}{2}\right). \end{cases}$$

D'après (24) il existe une équivalence

$$(25)\qquad (a_0, b_0, c_0) \backsim (a'_0, b'_0, c'_0), \qquad \omega' = \frac{\alpha\omega - \alpha'}{-\beta\omega + \beta'}$$

plus que complète, et, par conséquent, si l'on définit σ', τ' par

$$\sigma' = \alpha\sigma + \alpha'\tau + \alpha'', \quad \tau' = \beta\sigma + \beta'\tau + \beta'', \quad \alpha' \equiv 0 \pmod 4, \quad \beta \equiv 0 \pmod 2,$$

on aura, d'après (14),

$$\mathrm{El}^2\left(\frac{\sigma+\tau\omega}{2}, \frac{\omega}{2}\right) = \mathrm{El}^2\left(\frac{\sigma'+\tau'\omega'}{2}, \frac{\omega'}{2}\right).$$

Donc (24) donne

$$\mathrm{El}\left(\frac{\sigma'+\tau'\omega'}{2}, \frac{\omega'}{2}\right) = \pm\,\mathrm{El}\left(\frac{\sigma_1+\tau_1\omega'}{2}, \frac{\omega'}{2}\right),$$

et, par conséquent,

$$\frac{\sigma'+\tau'\omega'}{2} = \begin{cases} \pm\frac{\sigma_1+\tau_1\omega'}{2} + m' + n'\omega', \\ \frac{1}{2} \mp \frac{\sigma_1+\tau_1\omega'_1}{2} + m' + n'\omega', \end{cases} \qquad (m',\ n' \text{ entiers})$$

ou

$$\sigma' + \tau'\omega' = \varepsilon(\sigma_1 + \tau_1\omega') + m + n\omega',$$

$$\varepsilon = \pm 1, \qquad m \equiv \frac{1-\varepsilon}{2} \pmod 2, \qquad n \equiv 0 \pmod 2),$$

d'où, en séparant le réel de l'imaginaire,

$$\sigma_1 = \varepsilon\sigma' + m, \qquad \tau_1 = \varepsilon\tau' + n,$$

et

$$\sigma_1 = \varepsilon\alpha\sigma + \varepsilon\alpha'\tau + \alpha'' + m, \qquad \tau' = \varepsilon\beta\sigma + 3\beta'\tau + \beta'' + n.$$

permettent d'écrire celles de l'hypothèse sous la forme

$$\mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{\omega+2}{2}\right) = \mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{\omega'}{2}\right),$$

$$\mathrm{El}^2\left[\frac{\sigma - 2\tau + \tau(\omega+2)}{2}, \frac{\omega+2}{2}\right] = \mathrm{El}^2\left(\frac{\sigma_1 + \tau_1\omega'}{2}, \frac{\omega'}{2}\right).$$

Elles coïncident alors avec (24) où l'on aurait changé ω, σ en $\omega + 2$, $\sigma - 2\tau$; on a donc, d'après (25) et (26), les relations (27) où $\alpha'_1 \equiv 2 \pmod 4$.

Ainsi les relations (27) caractérisent une équivalence

$$(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0) \backsim (\sigma_1, \tau_1, a'_0, b'_0, c'_0)$$

simplement complète.

On trouve, comme précédemment, que les quatre invariants caractéristiques *réels* sont

$$\frac{\left[E_1^2\left(\frac{1}{2}, 0\right) - E_2^2\left(\frac{1}{2}, 0\right)\right]^2 - 4E_1^2\left(\frac{1}{2}, 0\right)E_2^2\left(\frac{1}{2}, 0\right)}{E_0^4\left(\frac{1}{2}, 0\right)},$$

$$\frac{E_1\left(\frac{1}{2}, 0\right)E_2\left(\frac{1}{2}, 0\right)\left[E_1^2\left(\frac{1}{2}, 0\right) - E_2^2\left(\frac{1}{2}, 0\right)\right]}{E_0^4\left(\frac{1}{2}, 0\right)},$$

$$\frac{[E_1^2(\sigma, \tau) - E_2^2(\sigma, \tau)]\left[E_1^2\left(\frac{1}{2}, 0\right) - E_2^2\left(\frac{1}{2}, 0\right)\right] - 4E_1(\sigma, \tau)E_2(\sigma, \tau)E_1\left(\frac{1}{2}, 0\right)E_2\left(\frac{1}{2}, 0\right)}{\left[E_1^2\left(\frac{1}{2}, 0\right) + E_2^2\left(\frac{1}{2}, 0\right)\right]^2},$$

$$\frac{[E_1^2(\sigma, \tau) - E_2^2(\sigma, \tau)]E_1\left(\frac{1}{2}, 0\right)E_2\left(\frac{1}{2}, 0\right) + \left[E_1^2\left(\frac{1}{2}, 0\right) - E_2^2\left(\frac{1}{2}, 0\right)\right]E_1(\sigma, \tau)E_2(\sigma, \tau)}{\left[E_1^2\left(\frac{1}{2}, 0\right) + E_1^2\left(\frac{1}{2}, 0\right)\right]^2}.$$

En revenant aux notations de Jacobi (6), on voit que le système des quatre invariants caractéristiques d'une classe de systèmes $(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$ *complètement équivalents,* se compose *des parties réelles et imaginaires des deux grandeurs complexes*

$$\varkappa^2, \quad \mathrm{sn}^2(2\sigma K + 2\tau i K', \varkappa),$$

en supposant $\varkappa$, K, K′ définis comme fonctions de a_0, b_0, c_0 par

$$\varkappa = \mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{-b_0+i}{4c_0}\right),$$

$$2\mathrm{K} = \pi\,\mathfrak{S}_{00}^2\left(0, \frac{-b_0+i}{2c_0}\right), \qquad 2\mathrm{K}' = \pi\,\mathfrak{S}_{00}^2\left(0, \frac{b_0+i}{2a_0}\right)\ (^1).$$

§ 27. Lemmes.

1. Si, comme au § 14, dans la définition

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx,$$

qui a un sens lorsque la partie réelle de a est > 0, on pose $x = hy$, il vient

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty h^a y^{a-1} e^{-hy}\,dy,$$

$$h^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty y^{a-1}e^{-hy}\,dy.$$

Ainsi (§ 14, 4)

$$S = \sum_{1,\infty}^{h} h^{-1-\rho} = \frac{1}{\Gamma(1+\rho)}\sum_{1,\infty}^{h}\int_0^\infty y^\rho e^{-hy}\,dy = \frac{1}{\Gamma(1+\rho)}\int_0^\infty y^\rho \sum_{1,\infty}^{h} e^{-hy}\,dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1+\rho)}\int_0^\infty y^\rho\,\frac{e^{-y}\,dy}{1-e^{-y}}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1+\rho)}\int_0^\infty y^\rho e^{-y}\left(\frac{1}{1-e^{-y}} - \frac{1}{y}\right)dy + \frac{1}{\Gamma(1+\rho)}\int_0^\infty y^{\rho-1}e^{-y}\,dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1+\rho)}\int_0^\infty y^\rho e^{-y}\left(\frac{1}{1-e^{-y}} - \frac{1}{y}\right)dy + \frac{1}{\rho}.$$

Or la quantité

$$\frac{1}{1-e^{-y}} - \frac{1}{y} = \frac{y-1+e^{-y}}{y-ye^{-y}} = \frac{\frac{y^2}{1.2} - \frac{y^3}{1.2.3} + \dots}{y^2 - \frac{y^3}{1.2} + \dots}$$

---

(1) Cela résulte de la formule de transformation $\mathfrak{S}_{00}\left(0, \frac{-1}{\omega}\right) = (\sqrt{-i\omega})\,\mathfrak{S}_{00}(0,\omega)$, qui sera rappelée au § 30, et qui peut s'écrire ici

$$(1+b_0 i)\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2\frac{1+b_0 i}{2c_0}}\right)^2 = 2c_0\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2\frac{1-b_0 i}{2a_0}}\right)^2.$$

permettent d'écrire celles de l'hypothèse sous la forme

$$\mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{\omega+2}{2}\right) = \mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{\omega'}{2}\right),$$

$$\mathrm{El}^2\left[\frac{\sigma - 2\tau + \tau(\omega+2)}{2}, \frac{\omega+2}{2}\right] = \mathrm{El}^2\left(\frac{\sigma_1 + \tau_1\omega'}{2}, \frac{\omega'}{2}\right).$$

Elles coïncident alors avec (24) où l'on aurait changé ω, σ en $\omega + 2$, $\sigma - 2\tau$; on a donc, d'après (25) et (26), les relations (27) où $\alpha'_1 \equiv 2 \pmod 4$.

Ainsi les relations (27) caractérisent une équivalence

$$(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0) \backsim (\sigma_1, \tau_1, a'_0, b'_0, c'_0)$$

simplement complète.

On trouve, comme précédemment, que les quatre invariants caractéristiques *réels* sont

$$\frac{\left[E_1^2\left(\frac{1}{2}, 0\right) - E_2^2\left(\frac{1}{2}, 0\right)\right]^2 - 4E_1^2\left(\frac{1}{2}, 0\right)E_2^2\left(\frac{1}{2}, 0\right)}{E_0^4\left(\frac{1}{2}, 0\right)},$$

$$\frac{E_1\left(\frac{1}{2}, 0\right)E_2\left(\frac{1}{2}, 0\right)\left[E_1^2\left(\frac{1}{2}, 0\right) - E_2^2\left(\frac{1}{2}, 0\right)\right]}{E_0^4\left(\frac{1}{2}, 0\right)},$$

$$\frac{[E_1^2(\sigma,\tau) - E_2^2(\sigma,\tau)]\left[E_1^2\left(\frac{1}{2}, 0\right) - E_2^2\left(\frac{1}{2}, 0\right)\right] - 4E_1(\sigma,\tau)E_2(\sigma,\tau)E_1\left(\frac{1}{2}, 0\right)E_2\left(\frac{1}{2}, 0\right)}{\left[E_1^2\left(\frac{1}{2}, 0\right) + E_2^2\left(\frac{1}{2}, 0\right)\right]^2},$$

$$\frac{[E_1^2(\sigma,\tau) - E_2^2(\sigma,\tau)]E_1\left(\frac{1}{2}, 0\right)E_2\left(\frac{1}{2}, 0\right) + \left[E_1^2\left(\frac{1}{2}, 0\right) - E_2^2\left(\frac{1}{2}, 0\right)\right]E_1(\sigma,\tau)E_2(\sigma,\tau)}{\left[E_1^2\left(\frac{1}{2}, 0\right) + E_1^2\left(\frac{1}{2}, 0\right)\right]^2}.$$

En revenant aux notations de Jacobi (6), on voit que le système des quatre invariants caractéristiques d'une classe de systèmes $(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$ *complètement équivalents,* se compose *des parties réelles et imaginaires des deux grandeurs complexes*

$$\varkappa^2, \quad \mathrm{sn}^2(2\sigma K + 2\tau i K', \varkappa),$$

en supposant $\varkappa$, K, K′ définis comme fonctions de a_0, b_0, c_0 par

$$\varkappa = \mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{-b_0+i}{4c_0}\right),$$

$$2\mathrm{K} = \pi\vartheta_{00}^2\left(0, \frac{-b_0+i}{2c_0}\right), \qquad 2\mathrm{K}' = \pi\vartheta_{00}^2\left(0, \frac{b_0+i}{2a_0}\right) \text{ (1)}.$$

§ 27. Lemmes.

1. Si, comme au § 14, dans la définition

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx,$$

qui a un sens lorsque la partie réelle de a est > 0, on pose $x = hy$, il vient

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty h^a y^{a-1} e^{-hy}\,dy,$$

$$h^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty y^{a-1}e^{-hy}\,dy.$$

Ainsi (§ 14, 4)

$$\begin{aligned} \mathrm{S} = \sum_{1,\infty}^{h} h^{-1-\rho} &= \frac{1}{\Gamma(1+\rho)}\sum_{1,\infty}^{h}\int_0^\infty y^\rho e^{-hy}\,dy = \frac{1}{\Gamma(1+\rho)}\int_0^\infty y^\rho \sum_{1,\infty}^{h} e^{-hy}\,dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(1+\rho)}\int_0^\infty y^\rho \frac{e^{-y}\,dy}{1-e^{-y}} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1+\rho)}\int_0^\infty y^\rho e^{-y}\left(\frac{1}{1-e^{-y}} - \frac{1}{y}\right)dy + \frac{1}{\Gamma(1+\rho)}\int_0^\infty y^{\rho-1}e^{-y}\,dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(1+\rho)}\int_0^\infty y^\rho e^{-y}\left(\frac{1}{1-e^{-y}} - \frac{1}{y}\right)dy + \frac{1}{\rho}. \end{aligned}$$

Or la quantité

$$\frac{1}{1-e^{-y}} - \frac{1}{y} = \frac{y-1+e^{-y}}{y-ye^{-y}} = \frac{\dfrac{y^2}{1.2} - \dfrac{y^3}{1.2.3} + \ldots}{y^2 - \dfrac{y^3}{1.2} + \ldots}$$

---

(1) Cela résulte de la formule de transformation $\vartheta_{00}\left(0, \frac{-1}{\omega}\right) = (\sqrt{-i\omega})\,\vartheta_{00}(0,\omega)$, qui sera rappelée au § 30, et qui peut s'écrire ici

$$(1+b_0 i)\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2\frac{1+b_0 i}{2c_0}}\right)^2 = 2c_0\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2\frac{1-b_0 i}{2a_0}}\right)^2.$$

reste finie pour $y = 0$. Donc l'accroissement

$$\int_0^\infty (y^{\rho+\Delta\rho} - y^\rho) e^{-y}\left(\frac{1}{1-e^{-y}} - \frac{1}{y}\right) dy \qquad (\rho > -1)$$

peut être rendu aussi petit qu'on veut. L'intégrale

$$\int_0^\infty y^\rho e^{-y}\left(\frac{1}{1-e^{-y}} - \frac{1}{y}\right) dy$$

étant par conséquent fonction continue de ρ, on aura

$$\lim_{\rho=0} \int_0^\infty y^\rho e^{-y}\left(\frac{1}{1-e^{-y}} - \frac{1}{y}\right) dy$$
$$= \int_0^\infty e^{-y}\left(\frac{1}{1-e^{-y}} - \frac{1}{y}\right) dy = -\Gamma'(1)\ (^1).$$

Donc

$$\lim_{\rho=0}\left(\frac{1}{\rho} - \sum_{1,\infty}^{h} \frac{1}{h^{1+\rho}}\right) = \Gamma'(1).$$

2. Désignons par $\sum_{m,n}^{0}$ une sommation qui s'effectue par rapport à un indice, puis par rapport à l'autre, l'ordre des deux sommations partielles étant indifférent et m, n prenant les valeurs

$$m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \infty, \qquad \text{sauf} \qquad m = n = 0.$$

Soient σ, τ des quantités réelles ou complexes qui ne sont ni nulles ni entières. Posons

$$f(x, y) = a_0 x^2 + b_0 xy + c_0 y^2, \qquad f'(x, y) = c_0 x^2 - b_0 xy + a_0 y^2$$
$$(4 a_0 c_0 - b_0^2 = 1),$$

$$e^{-x f(m,n) + 2(m\sigma + n\tau)\pi i} = u_{mn}, \qquad \frac{2\pi}{x} e^{-\frac{4\pi^2}{x} f'(\sigma+m,\, \tau+n)} = v_{mn},$$

$$\sum_{m,n}^{0} \frac{e^{2(m\sigma+n\tau)\pi i}}{f(m, n)^{1+\rho}} = S.$$

---

(1) On a

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-ax}}{1-e^{x}}\right)$$

(voir le *Cours* de M. Hermite, quatrième édition, p. 128).

On verra au paragraphe suivant que S converge pour $\rho = 0$. La même transformation que tout à l'heure donne

$$S = \frac{1}{\Gamma(1+\rho)} \sum_{m,n}^{0} \int_0^\infty x^\rho u_{mn}\, dx \qquad (\rho \geqq 0)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1+\rho)} \sum_{m,n}^{0} \left(\int_0^a x^\rho u_{mn}\, dx + \int_a^\infty x^\rho u_{mn}\, dx \right) \qquad (a > 0),$$

ou, puisque la série $\sum\limits_{m,n}^{0} \int_a^\infty x^\rho u_{mn}\, dx$ converge (et cela, même pour $\rho = 0$),

$$S = \frac{1}{\Gamma(1+\rho)} \left(\sum_{m,n}^{0} \int_0^a x^\rho u_{mn}\, dx + \sum_{m,n}^{0} \int_a^\infty x^\rho u_{mn}\, dx \right)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1+\rho)} \left[\int_0^a \left(-1 + \frac{2\pi}{x} e^{-\frac{4\pi^2}{x} f'(\sigma,\tau)} \right) x^\rho\, dx + \sum_{m,n}^{0} \int_0^a x^\rho v_{mn}\, dx \right]$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(1+\rho)} \sum_{m,n}^{0} \int_a^\infty x^\rho u_{mn}\, dx \qquad [\text{§ 23 (19)}].$$

La partie réelle de

$$f'(\sigma+m, \tau+n) = f'(\sigma,\tau) + m(2c_0\sigma - b_0\tau) + n(2a_0\tau - b_0\sigma) + f'(m,n)$$

restant positive (§ **14**, **1**) pour m, n assez grands, la série $\sum\limits_{m,n}^{0} x^\rho v_{mn}$ convergera uniformément dans l'intervalle $(0, a)$, si a est assez petit. On aura donc

$$S = \frac{1}{\Gamma(1+\rho)} \left[\int_0^a \left(-1 + \frac{2\pi}{x} e^{-\frac{4\pi^2}{x} f'(\sigma,\tau)} + \sum_{m,n}^{0} v_{mn} \right) x^\rho\, dx + \int_a^\infty \sum_{m,n}^{0} x^\rho u_{mn}\, dx \right].$$

On voit directement, comme au § **14**, que les deux intégrales sont continues en ρ pour $\rho \geqq 0$. Il en est donc de même de S, et, puisque les deux fonctions qui figurent sous les deux derniers

que nous désignerons avec M. Weber par $\eta(\omega)$, en sorte que l'on a

$$\mathfrak{I}'(0, \omega) = 2\pi\eta^3(\omega),$$

et, d'après ce qui précède,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\eta^{-1}(\omega)\mathfrak{I}(\zeta, \omega) \\ &= \left[\frac{2\pi}{\mathfrak{I}'(0, \omega)}\right]^{\frac{1}{3}}\mathfrak{I}(\zeta, \omega) = 2e^{\frac{\omega\pi i}{6}}\sin\zeta\pi\prod_{n,\varepsilon}[1 - e^{2(n\omega+\varepsilon\zeta)\pi i}] \\ &(\varepsilon = +1, -1; \qquad n = 1, 2, 3, \ldots); \end{aligned}\right.$$

ζ est ici arbitraire, ωi a sa partie réelle négative. Soient σ, τ deux grandeurs complexes quelconques; ω_1, ω_2 des grandeurs complexes telles que $\omega_1 i$, $\omega_2 i$ aient des parties réelles négatives. Posons

$$e^{\pi i\tau^2(\omega_1+\omega_2)}\frac{\mathfrak{I}(\sigma + \tau\omega_1, \omega_1)\mathfrak{I}(\sigma - \tau\omega_1, \omega_1)}{\eta(\omega_1)\eta(\omega_2)} = \Lambda(\sigma, \tau, \omega_1, \omega_2)\ (^1);$$

en remplaçant dans (1) $\sin\zeta\pi$ par $-\frac{e^{-\zeta\pi i}}{2i}(1 - e^{2\zeta\pi i})$ et en faisant passer le second facteur sous le signe Π, on aura

$$\frac{\mathfrak{I}(\zeta, \omega)}{\eta(\omega)} = ie^{\frac{\omega\pi i}{6}-\zeta\pi i}\prod_{n,\varepsilon}[1 - e^{2(n\omega+\varepsilon\zeta)\pi i}]$$

$$(\varepsilon = +1, n = 0, 1, 2, 3, \ldots; \qquad \varepsilon = -1, n = 1, 2, 3, \ldots)$$

d'où

$$\frac{\mathfrak{I}(\sigma + \tau\omega_1, \omega_1)}{\eta(\omega_1)} = ie^{\frac{\omega_1\pi i}{6}-(\sigma+\tau\omega_1)\pi i}\prod_{n,\varepsilon}[1 - e^{2(n\omega_1+\varepsilon\tau\omega_1+\varepsilon\sigma)\pi i}]$$

$$(\varepsilon = +1, n = 0, 1, 2, 3, \ldots; \qquad \varepsilon = -1, n = 1, 2, 3, \ldots).$$

---

(1) On en déduit, en posant, comme précédemment, $\mathrm{El}\left(\frac{1}{2}\zeta, \frac{1}{2}\omega\right) = \frac{\mathfrak{I}_{11}(\zeta, \omega)}{\mathfrak{I}_{01}(\zeta, \omega)}$,

$$\mathrm{El}\left(\frac{\sigma + \tau\omega_1}{2}, \frac{\omega_1}{2}\right)\mathrm{El}\left(\frac{\sigma - \tau\omega_2}{2}, \frac{\omega_2}{2}\right) = \frac{\Lambda(\sigma, \tau, \omega_1, \omega_2)}{\Lambda(\sigma, \tau + \frac{1}{2}, \omega_1, \omega_2)}$$

(voir *Sitzungsberichte*, p. 55; 1889).

et, puisque $\mathfrak{S}$ est impaire,

$$\frac{\mathfrak{S}(\sigma - \tau\omega_2, \omega_2)}{\eta(\omega_2)} = -\frac{\mathfrak{S}(\tau\omega_2 - \sigma, \omega_2)}{\eta(\omega_2)}$$

$$= \frac{1}{i} e^{\frac{\omega_2 \pi i}{6} - (\tau\omega_2 - \sigma)\pi i} \prod_{n, \varepsilon} [1 - e^{2(n\omega_2 + \varepsilon\tau\omega_1 - \varepsilon\sigma)\pi i}];$$

$$(\varepsilon = +1, n = 0, 1, 2, 3, \ldots; \qquad \varepsilon = -1, n = 1, 2, 3, \ldots);$$

donc, en faisant le produit

$$(2) \quad \begin{cases} A(\sigma, \tau, \omega_1, \omega_2) = e^{\pi i \left(\tau^2 - \tau + \frac{1}{6}\right)(\omega_1 + \omega_2)} \prod_{\alpha, \varepsilon, n} [1 - e^{2[n\omega_\alpha + \varepsilon\tau\omega_\alpha - (-1)^\alpha \varepsilon\sigma]\pi i}]; \\ \varepsilon = +1, n = 0, 1, 2, 3, \ldots; \qquad \varepsilon = -1, n = 1, 2, 3, \ldots; \\ \alpha = 1, 2; \\ \log A(\sigma, \tau, \omega_1, \omega_2) \\ \quad = \left(\tau^2 - \tau + \frac{1}{6}\right)(\omega_1 + \omega_2)\pi i + \sum_{\alpha, \varepsilon, n} \log(1 - e^{2[n\omega_\alpha + \varepsilon\tau\omega_\alpha - (-1)^\alpha \varepsilon\sigma]\pi i}. \end{cases}$$

Le but des développements suivants est d'arriver à la formule (7) qui fournit le développement de $\log A$ en série double de Fourier par rapport aux variables σ, τ; $\log A$ admet la période 1 pour σ, mais n'est pas périodique en τ; la période artificielle qui sera introduite pour τ est 1, et de là naîtra *a priori* la condition que τ soit réel et compris entre 0 et 1 (§ 1). La méthode directe conduirait à des intégrations difficiles; la méthode que nous allons employer est indirecte, et fournira précisément ainsi le résultat de ces intégrations.

Assujettissons σ, τ à la condition que la partie réelle de $[n\omega_\alpha + \varepsilon\tau\omega_\alpha - (-1)^\alpha \varepsilon\sigma]i$ soit négative pour les deux valeurs $\varepsilon = +1$, $\varepsilon = -1$. On pourra alors écrire

$$\log[1 - e^{2[n\omega_\alpha + \varepsilon\tau\omega_\alpha - (-1)^\alpha \varepsilon\sigma]i}] = -\sum_m \frac{1}{m} e^{2m[n\omega_\alpha + \varepsilon\tau\omega_\alpha - (-1)^\alpha \varepsilon\sigma]\pi i}$$

$$(m = 1, 2, 3, \ldots)$$

en prenant pour le logarithme du premier membre la valeur dont le module est le plus petit. Comme pour $\varepsilon = +1$, la valeur minima de n est 0, et que, pour $\varepsilon = -1$, elle est 1, les conditions imposées à σ, τ sont que les quatre grandeurs

$$(\tau\omega_1 + \sigma)i, \quad \omega_1 i - (\tau\omega_1 + \sigma)i, \quad (\tau\omega_2 - \sigma)i, \quad \omega_2 i - (\tau\omega_2 - \sigma)i$$

que nous désignerons avec M. Weber par $\eta(\omega)$, en sorte que l'on a

$$\mathfrak{S}'(0, \omega) = 2\pi\eta^3(\omega),$$

et, d'après ce qui précède,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\eta^{-1}(\omega)\mathfrak{S}(\zeta, \omega)\\ &\quad = \left[\frac{2\pi}{\mathfrak{S}'(0, \omega)}\right]^{\frac{1}{3}}\mathfrak{S}(\zeta, \omega) = 2e^{\frac{\omega\pi i}{6}}\sin\zeta\pi\prod_{n,\varepsilon}[1 - e^{2(n\omega+\varepsilon\zeta)\pi i}]\\ &\quad (\varepsilon = +1, -1;\qquad n = 1, 2, 3, \ldots);\end{aligned}\right.$$

ζ est ici arbitraire, ωi a sa partie réelle négative. Soient σ, τ deux grandeurs complexes quelconques; ω_1, ω_2 des grandeurs complexes telles que $\omega_1 i$, $\omega_2 i$ aient des parties réelles négatives. Posons

$$e^{\pi i\tau^2(\omega_1+\omega_2)}\frac{\mathfrak{S}(\sigma + \tau\omega_1, \omega_1)\mathfrak{S}(\sigma - \tau\omega_1, \omega_1)}{\eta(\omega_1)\eta(\omega_2)} = \Lambda(\sigma, \tau, \omega_1, \omega_2)\ (^1);$$

en remplaçant dans (1) $\sin\zeta\pi$ par $\frac{-e^{-\zeta\pi i}}{2i}(1 - e^{2\zeta\pi i})$ et en faisant passer le second facteur sous le signe Π, on aura

$$\frac{\mathfrak{S}(\zeta, \omega)}{\eta(\omega)} = ie^{\frac{\omega\pi i}{6}-\zeta\pi i}\prod_{n,\varepsilon}[1 - e^{2(n\omega+\varepsilon\zeta)\pi i}]$$

$$(\varepsilon = +1, n = 0, 1, 2, 3, \ldots;\qquad \varepsilon = -1, n = 1, 2, 3, \ldots)$$

d'où

$$\frac{\mathfrak{S}(\sigma + \tau\omega_1, \omega_1)}{\eta(\omega_1)} = ie^{\frac{\omega_1\pi i}{6}-(\sigma+\tau\omega_1)\pi i}\prod_{n,\varepsilon}[1 - e^{2(n\omega_1+\varepsilon\tau\omega_1+\varepsilon\sigma)\pi i}]$$

$$(\varepsilon = +1, n = 0, 1, 2, 3, \ldots;\qquad \varepsilon = -1, n = 1, 2, 3, \ldots),$$

(¹) On en déduit, en posant, comme précédemment, $\mathrm{El}\left(\frac{1}{2}\zeta, \frac{1}{2}\omega\right) = \frac{\mathfrak{S}_{11}(\zeta, \omega)}{\mathfrak{S}_{01}(\zeta, \omega)}$,

$$\mathrm{El}\left(\frac{\sigma + \tau\omega_1}{2}, \frac{\omega_1}{2}\right)\mathrm{El}\left(\frac{\sigma - \tau\omega_2}{2}, \frac{\omega_2}{2}\right) = \frac{\Lambda(\sigma, \tau, \omega_1, \omega_2)}{\Lambda(\sigma, \tau + \frac{1}{2}, \omega_1, \omega_2)}$$

(voir *Sitzungsberichte*, p. 55; 1889).

et, puisque $\mathfrak{S}$ est impaire,

$$\frac{\mathfrak{S}(\sigma - \tau\omega_2, \omega_2)}{\eta(\omega_2)} = -\frac{\mathfrak{S}(\tau\omega_2 - \sigma, \omega_2)}{\eta(\omega_2)}$$

$$= \frac{1}{i} e^{\frac{\omega_2 \pi i}{6} - (\tau\omega_2 - \sigma)\pi i} \prod_{n, \varepsilon} [1 - e^{2(n\omega_2 + \varepsilon\tau\omega_2 - \varepsilon\sigma)\pi i}];$$

$$(\varepsilon = +1, n = 0, 1, 2, 3, \ldots; \qquad \varepsilon = -1, n = 1, 2, 3, \ldots);$$

donc, en faisant le produit

$$(2) \left\{ \begin{aligned} & A(\sigma, \tau, \omega_1, \omega_2) = e^{\pi i \left(\tau^2 - \tau + \frac{1}{6}\right)(\omega_1 + \omega_2)} \prod_{\alpha, \varepsilon, n} [1 - e^{2[n\omega_\alpha + \varepsilon\tau\omega_\alpha - (-1)^\alpha \varepsilon\sigma]\pi i}]; \\ & \qquad \varepsilon = +1, n = 0, 1, 2, 3, \ldots; \qquad \varepsilon = -1, n = 1, 2, 3, \ldots; \\ & \qquad\qquad \alpha = 1, 2; \\ & \log A(\sigma, \tau, \omega_1, \omega_2) \\ & \quad = \left(\tau^2 - \tau + \frac{1}{6}\right)(\omega_1 + \omega_2)\pi i + \sum_{\alpha, \varepsilon, n} \log(1 - e^{2[n\omega_\alpha + \varepsilon\tau\omega_\alpha - (-1)^\alpha \varepsilon\sigma]\pi i}. \end{aligned} \right.$$

Le but des développements suivants est d'arriver à la formule (7) qui fournit le développement de $\log A$ en série double de Fourier par rapport aux variables σ, τ; $\log A$ admet la période 1 pour σ, mais n'est pas périodique en τ; la période artificielle qui sera introduite pour τ est 1, et de là naîtra *a priori* la condition que τ soit réel et compris entre 0 et 1 (§ 1). La méthode directe conduirait à des intégrations difficiles; la méthode que nous allons employer est indirecte, et fournira précisément ainsi le résultat de ces intégrations.

Assujettissons σ, τ à la condition que la partie réelle de $[n\omega_\alpha + \varepsilon\tau\omega_\alpha - (-1)^\alpha \varepsilon\sigma]i$ soit négative pour les deux valeurs $\varepsilon = +1$, $\varepsilon = -1$. On pourra alors écrire

$$\log[1 - e^{2[n\omega_\alpha + \varepsilon\tau\omega_\alpha - (-1)^\alpha\varepsilon\sigma]i}] = -\sum_m \frac{1}{m} e^{2m[n\omega_\alpha + \varepsilon\tau\omega_\alpha - (-1)^\alpha\varepsilon\sigma]\pi i}$$

$$(m = 1, 2, 3, \ldots)$$

en prenant pour le logarithme du premier membre la valeur dont le module est le plus petit. Comme pour $\varepsilon = +1$, la valeur minima de n est 0, et que, pour $\varepsilon = -1$, elle est 1, les conditions imposées à σ, τ sont que les quatre grandeurs

$$(\tau\omega_1 + \sigma)i, \quad \omega_1 i - (\tau\omega_1 + \sigma)i, \quad (\tau\omega_2 - \sigma)i, \quad \omega_2 i - (\tau\omega_2 - \sigma)i$$

aient leurs parties réelles négatives. Ajoutons maintenant la condition que τ soit réel et $0 \leqq \tau \leqq 1$; on aura [§ 1, (8)]

$$\tau^2 - \tau + \frac{1}{6} = \frac{1}{2\pi^2} \sum_n \frac{e^{2n\tau\pi i}}{n^2}, \qquad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \quad \ldots.$$

Ainsi

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} &\log \mathrm{A}(\sigma, \tau, \omega_1, \omega_2) \\ &\quad = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2\pi} \sum_{n_0} \frac{e^{2n_0\tau\pi i}}{n_0^2} - \lim_{k=\infty} \lim_{h=\infty} \sum_{\alpha, \varepsilon, m, n} \frac{1}{m} e^{2m[n\omega_\alpha + \varepsilon\tau\omega_\alpha - (-1)^\alpha \varepsilon\sigma]\pi i}, \\ &\qquad\qquad m = 1, 2, \ldots h; \\ &(n_0 = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots; \alpha = 1, 2; m = 1, 2, \ldots, h; \\ &\varepsilon = +1, n = 0, 1, 2, \ldots, k; \varepsilon = -1, n = 1, 2, \ldots, k) \end{aligned} \right.$$

l'ordre des signes *limite* étant imposé par ce qui précède. En sommant par rapport à n dans la seconde partie du second membre, on obtient d'abord, pour $\varepsilon = +1$, $n = 0, 1, 2, \ldots, k-1$ (il importe peu que la limite supérieure soit k ou $k-1$, puisqu'on fait tendre k vers ∞),

$$\sum_{n=0}^{n=k-1} e^{2nm\omega_\alpha\pi i} = \frac{1 - e^{2km\omega_\alpha\pi i}}{1 - e^{2m\omega_\alpha\pi i}},$$

puis, pour $\varepsilon = -1$, $n = 1, 2, \ldots, k$,

$$\sum_{n=1}^{n=k} e^{2nm\omega_\alpha\pi i} = e^{2m\omega_\alpha\pi i} \frac{1 - e^{2km\omega_\alpha\pi i}}{1 - e^{2m\omega_\alpha\pi i}} = \frac{1 - e^{2km\omega_\alpha\pi}}{e^{-2m\omega_\alpha\pi i} - 1}.$$

Ainsi, la seconde partie du second membre de (3) devient

$$(4) \qquad -\lim_{k=\infty} \lim_{h=\infty} \sum_{\alpha, \varepsilon, m} \frac{e^{2m\varepsilon[\tau\omega_\alpha - (-1)^\alpha\sigma]\pi i}}{\varepsilon m} \frac{1 - e^{2km\omega_\alpha\pi i}}{1 - e^{2\varepsilon m\omega_\alpha\pi i}}.$$

En prenant les deux valeurs de ε, on voit que le facteur qui multiplie $-e^{2km\omega_\alpha\pi i}$ dans le terme général est

$$\frac{e^{2m[\tau\omega_\alpha - (-1)^\alpha\sigma]\pi i}}{m(1 - e^{2m\omega_\alpha\pi i})} + \frac{e^{-2m[\tau\omega_\alpha - (-1)^\alpha\sigma]\pi i}}{-m(1 - e^{-2m\omega_\alpha\pi i})},$$

ou, en multipliant haut et bas la seconde fraction par $e^{2m\omega_\alpha\pi i}$,

$$\frac{e^{2m[\tau\omega_\alpha - (-1)^\alpha\sigma]\pi i} + e^{2m[\omega_\alpha - \tau\omega_\alpha + (-1)^\alpha\sigma]\pi i}}{m(1 - e^{2m\omega_\alpha\pi i})}.$$

Grâce aux conditions que les parties réelles de

$$\omega_\alpha i,\qquad [\tau\omega_\alpha-(-1)^\alpha\sigma]i,\qquad [\omega_\alpha-\tau\omega_\alpha+(-1)^\alpha\sigma]i$$

soient négatives, le produit de cette expression par $e^{2km\omega_\alpha\pi i}$ tend vers o quand m tend vers ∞ et, par conséquent, la somme des expressions semblables correspondant aux valeurs $m=1, 2, 3, \ldots$ est finie et, on le voit, uniformément convergente. Comme d'ailleurs $e^{2km\omega_\alpha\pi i}$ tend vers o quand k croît indéfiniment, (4) se réduit à

$$-\lim_{h=\infty}\sum_{\alpha,\varepsilon,m}\frac{1}{\varepsilon m}\,\frac{e^{2\varepsilon m[\tau\omega_\alpha-(-1)^\alpha\sigma]\pi i}}{1-e^{2\varepsilon m\omega_\alpha\pi i}}.$$

En supprimant ε, on aura à sommer pour $m=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm\infty$; donc

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}&\log \mathrm{A}(\sigma, \tau, \omega_1, \omega_2)\\&\quad=\frac{(\omega_1+\omega_2)i}{2\pi}\sum_{n_0}\frac{e^{2n_0\tau\pi i}}{n_0^2}-\lim_{h=\infty}\sum_{\alpha,m}\frac{1}{m}\,\frac{e^{2m[\tau\omega_\alpha-(-1)^\alpha\sigma]\pi i}}{1-e^{2m\omega_\alpha\pi i}}\\&(n_0=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots;\ \alpha=1, 2;\ m=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm h).\end{aligned}\right.$$

Or on a déjà observé [§ 1, (9)] le développement

$$\frac{e^{2m\omega\tau\pi i}}{1-e^{2m\omega\pi i}}=\frac{1}{2\pi i}\lim_{k=\infty}\sum_n\frac{e^{2n\tau\pi i}}{n-m\omega}$$

$$(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm k,\qquad \tau \text{ réel et }\qquad 0<\tau<1).$$

Donc

$$2\pi i\sum_{\alpha,m}\frac{1}{m}\,\frac{e^{2m[\tau\omega_\alpha-(-1)^\alpha\sigma]\pi i}}{1-e^{2m\omega_\alpha\pi i}}=\lim_{k=\infty}\sum_{\alpha,m,n}\frac{e^{[-(-1)^\alpha 2m\sigma+2n\tau]\pi i}}{m(n-m\omega_\alpha)}$$

$$(\alpha=1, 2;\quad m=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm h;\quad n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm k),$$

et le second membre devient, en changeant le signe de m pour $\alpha=2$,

$$\lim_{k=\infty}\sum_{m,n}\left[\frac{1}{m(n-m\omega_1)}-\frac{1}{m(n+m\omega_2)}\right]e^{2(m\sigma+n\tau)\pi i},$$

ou

$$-(\omega_1+\omega_2)\lim_{k=\infty}\sum_{m,n}\frac{e^{2(m\sigma+n\tau)\pi i}}{m^2\omega_1\omega_2+mn(\omega_1-\omega_2)-n^2}$$

$$(m=\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm h;\qquad n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm k).$$

Posons, pour simplifier,

$$(6)\qquad \frac{\omega_1\omega_2}{\omega_1+\omega_2}=a_0 i,\qquad \frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1+\omega_2}=b_0 i,\qquad \frac{-1}{\omega_1+\omega_2}=c_0 i,$$

en sorte que ω_1, $-\omega_2$ sont les deux racines de

$$a_0+b_0\omega+c_0\omega^2=0;$$

on aura

$$-\lim_{n=\infty}\sum_{\alpha,m}\frac{1}{m}\,\frac{e^{2m(\tau\omega_\alpha\pm\sigma)\pi i}}{1-e^{2m\omega_\alpha\pi i}}=\frac{-1}{2\pi}\lim_{h=\infty}\lim_{k=\infty}\sum_{m,n}\frac{e^{2(m\sigma+n\tau)\pi i}}{a_0m^2+b_0mn+c_0n^2}$$

$$(m=\pm1,\pm2,\ldots,\pm h;\qquad n=0,\pm1,\pm2,\ldots,\pm k);$$

d'ailleurs

$$\frac{(\omega_1+\omega_2)i}{2\pi}\sum_{n_0=1}^{n_0=\infty}\frac{e^{2n_0\tau\pi i}}{n_0^2}=-\frac{1}{2\pi}\lim_{k=\infty}\sum_{n}\frac{e^{2n\tau\pi i}}{c_0n^2}$$

$$(n_0=\pm1,\pm2,\ldots,\pm\infty;\qquad n=\pm1,\pm2,\ldots,\pm k);$$

donc (5) se transforme en l'égalité importante

$$(7)\quad\begin{cases}\log\mathrm{A}(\sigma,\tau,\omega_1,\omega_2)=\dfrac{-1}{2\pi}\lim\limits_{h=\infty}\lim\limits_{k=\infty}\sum\limits_{m,n}\dfrac{e^{2\pi i(m\sigma+n\tau)}}{a_0m^2+b_0mn+c_0n^2}\\ (m=0,\pm1,\pm2,\ldots,\pm h;\ n=0,\pm1,\pm2,\ldots+k;\ \text{sauf } m=n=0).\end{cases}$$

Les grandeurs ω_1, ω_2 sont complexes et telles que $\omega_1 i$, $\omega_2 i$ aient leurs parties réelles négatives; les grandeurs a_0, b_0, c_0 sont telles que les deux racines de

$$a_0+b_0\omega+c_0\omega^2=0$$

soient ω_1, $-\omega_2$, avec la condition ressortant de (6)

$$4a_0c_0-b_0^2=1;$$

enfin σ, τ sont assujettis aux conditions suivantes :

$$\tau \text{ est réel}\qquad\text{et}\qquad 0<\tau<1,$$

et, en posant

$$\sigma=\sigma^0+\sigma' i,\qquad \omega_1=\omega_1^0+\omega_1' i,\qquad \omega_2=\omega_2^0+\omega_2' i,$$

on doit avoir

$$-\tau<\frac{\sigma'}{\omega_1'}<1-\tau,\qquad -\tau<\frac{-\sigma'}{\omega_2'}<1-\tau;$$

cela résulte de ce que les quantités

$$\omega_1 i,\quad \omega_2 i,\quad (\tau\omega_1+\sigma)i,$$
$$\omega_1 i-(\tau\omega_1+\sigma)i,\quad (\tau\omega_2-\sigma)i,\quad \omega_2 i-(\tau\omega_2-\sigma)i$$

doivent avoir leurs parties réelles négatives, c'est-à-dire

$$\omega'_1>0,\qquad \omega'_2>0,\qquad \sigma'+\tau\omega'_1>0,$$
$$\omega'_1(1-\tau)-\sigma'>0,\qquad -\sigma'+\tau\omega'_2>0,\qquad \omega'_2(1-\tau)+\sigma'>0,$$

d'où, puisque ω'_1, ω'_2 sont positifs,

$$\frac{\sigma'}{\omega'_1}>-\tau,\qquad \frac{\sigma'}{\omega'_1}<1-\tau,\qquad \frac{-\sigma'}{\omega'_2}>-\tau,\qquad \frac{-\sigma'}{\omega'_2}<1-\tau.$$

La formule (7) étant un développement en série de Fourier, on peut intervertir l'ordre des sommations pourvu que l'on somme toujours par rapport à un indice d'abord, puis par rapport à l'autre. Ainsi

$$(8)\quad \begin{cases} \log\Lambda(\sigma,\tau,\omega_1,\omega_2)=\dfrac{-1}{2\pi}\displaystyle\sum_m\sum_n\frac{e^{2\pi i(m\sigma+n\tau)}}{a_0m^2+b_0mn+c^0n^2}\\[2ex] \qquad\qquad =\dfrac{-1}{2\pi}\displaystyle\sum_n\sum_m\frac{e^{2\pi i(m\sigma+n\tau)}}{a_0m^2+b_0mn+c_0n^2}\\[2ex] (m,\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots,\ \pm\infty,\qquad \text{sauf}\qquad m=n=0). \end{cases}$$

On verra tout à l'heure que le premier membre comme le second reste inaltéré quand σ, τ varient de nombres entiers; les conditions imposées à τ se réduisent donc à celle que τ ne soit pas un entier, et il ne reste pour σ que celles imposées à la partie imaginaire, lesquelles sont toujours vérifiées si σ est réel.

Pour $\sigma=\tau=0$, les deux membres de (8) deviennent infinis.

Étudions maintenant l'invariance de la fonction Λ. Rappelons d'abord la définition

$$\Lambda(\sigma,\tau,\omega_1,\omega_2)=(4\pi^2)^{\frac{1}{3}}e^{\tau^2(\omega_1+\omega_2)\pi i}\frac{\mathfrak{S}(\sigma+\tau\omega_1,\omega_1)\,\mathfrak{S}(\sigma-\tau\omega_2,\omega_2)}{[\mathfrak{S}'(0,\omega_1)\,\mathfrak{S}'(0,\omega_2)]^{\frac{1}{3}}},$$

et les relations connues

$$\mathfrak{S}(\zeta,\omega)=-\mathfrak{S}(-\zeta,\omega)=-\mathfrak{S}(\zeta+1,\omega),$$
$$-\mathfrak{S}(\zeta,\omega)=e^{(\omega+2\zeta)\pi i}\mathfrak{S}(\zeta+\omega,\omega)=e^{(\omega-2\zeta)\pi i}\mathfrak{S}(\zeta-\omega,\omega);$$

on en conclut

$$(9)\qquad \Lambda(\sigma,\tau,\omega_1,\omega_2)=\Lambda(\sigma+1,\tau,\omega_1,\omega_2)=\Lambda(\sigma,\tau+1,\omega_1,\omega_2).$$

De même l'équation de transformation

$$\vartheta(\zeta, \omega+1) = e^{\frac{\pi i}{4}} \vartheta(\zeta, \omega)\ (^1)$$

donne

(10) $$\Lambda(\sigma, \tau, \omega_1, \omega_2) = \Lambda(\sigma+\tau, \tau, \omega_1 - 1, \omega_2 + 1).$$

Enfin la seconde équation fondamentale de transformation

$$\vartheta\left(\zeta, \frac{-1}{\omega}\right) = -i(\sqrt{-i\omega})e^{\zeta^2\omega\pi i}\vartheta(\zeta\omega, \omega)$$

et sa conséquence

$$\vartheta'\left(0, \frac{-1}{\omega}\right) = (\sqrt{-i\omega})^3\vartheta'(0, \omega)$$

donnent

(11) $$\Lambda(\sigma, \tau, \omega_1, \omega_2) = \Lambda\left(-\tau, \sigma, \frac{-1}{\omega_1}, \frac{-1}{\omega_2}\right).$$

La relation (9) montre que Λ reste inaltérée quand σ, τ varient de nombres entiers. Les relations (10) et (11) montrent que Λ reste inaltérée par les substitutions élémentaires

$$\begin{pmatrix} \sigma, & \tau, & \omega_1, & \omega_2 \\ \sigma+\tau, & \tau, & \omega_1 - 1, & \omega_2 + 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sigma, & \tau, & \omega_1, & \omega_2 \\ -\tau, & \sigma, & \dfrac{-1}{\omega_1}, & \dfrac{-1}{\omega_2} \end{pmatrix}.$$

Or on a vu que toute substitution

$$\begin{pmatrix} \sigma & \tau \\ \alpha\sigma+\alpha'\tau, & \beta\sigma+\beta'\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma}{\tau}, & \dfrac{\alpha'+\alpha\dfrac{\sigma}{\tau}}{\beta'+\beta\dfrac{\sigma}{\tau}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta' & \beta \\ \alpha' & \alpha \end{pmatrix},$$

où α, α', β, β' sont entiers et $\alpha\beta' - \beta\alpha' = 1$ peut être composée des deux substitutions élémentaires

$$\begin{pmatrix} \sigma & \tau \\ \sigma+\tau & \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma}{\tau}, & \dfrac{\sigma}{\tau}+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = C,$$

$$\begin{pmatrix} \sigma, & \tau \\ -\tau, & \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma}{\tau}, & \dfrac{-1}{\dfrac{\sigma}{\tau}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

---

(1) Voir, par exemple, *Elliptische Functionen und algebraische Zahlen* de M. Weber, § 26. Les formules générales seront rappelées au § 30.

Imaginons alors une substitution quelconque $\begin{pmatrix} \beta' & \beta \\ \alpha' & \alpha \end{pmatrix} = S$ décomposée en substitutions C et B

$$S = C^{\lambda} B^{\mu} C^{\lambda'} B^{\mu'} \ldots,$$

et appliquons successivement toutes les substitutions composantes à $\frac{\sigma}{\tau}$, en appliquant chaque fois la même substitution à ω_1, ω_2 si c'est une substitution B, et, si c'est une substitution C, la substitution C à ω_2 et la substitution

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (\omega_1, \omega_1 - 1) = C^{-1}$$

à ω_1, en sorte que, si la substitution résultante est

$$S = C^{\lambda} B^{\mu} C^{\lambda'} B^{\mu'} \ldots = \begin{pmatrix} \beta', & \beta \\ \alpha', & \alpha \end{pmatrix}$$

pour $\frac{\sigma}{\tau}$ et ω_2, elle sera

$$S' = C^{-\lambda} B^{\mu} C^{-\lambda'} B^{\mu'} \ldots$$

pour ω_1. Je dis que l'on aura toujours

$$S' = \begin{pmatrix} \beta' & -\beta \\ -\alpha' & \alpha \end{pmatrix}.$$

Il suffit de prouver que, si cela est vrai pour S, S', ce sera encore vrai pour SC^{λ}, $S'C^{-\lambda}$. Or on a

$$SC^{\lambda} = \begin{pmatrix} \beta' & \beta \\ \alpha' & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta' + \beta\lambda & \beta \\ \alpha' + \alpha\lambda & \alpha \end{pmatrix},$$

$$S'C^{-\lambda} = \begin{pmatrix} \beta' & -\beta \\ -\alpha' & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta' + \beta\lambda & -\beta \\ -\alpha' - \alpha\lambda & \alpha \end{pmatrix},$$

ce qui rend l'assertion évidente. On aura donc

$$(12) \quad \begin{cases} A(\sigma, \tau, \omega_1, \omega_2) \\ \quad = A\left(\alpha\sigma + \alpha'\tau + \alpha'', \beta\sigma + \beta'\tau + \beta'', \dfrac{-\alpha' + \alpha\omega_1}{\beta' - \beta\omega_1}, \dfrac{\alpha' + \alpha\omega_2}{\beta' + \beta\omega_2}\right), \end{cases}$$

$\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta''$ étant des entiers assujettis à la seule condition

$$\alpha\beta' - \beta\alpha' = 1.$$

Si l'on introduit au lieu de ω_1, ω_2 les grandeurs a_0, b_0, c_0 pour

lesquelles

$$\omega_1 = \frac{-b_0 + i}{2c_0}, \qquad \omega_2 = \frac{b_0 + i}{2c_0}, \qquad 4a_0c_0 - b_0^2 = 1,$$

la relation (12) pourra s'écrire

$$(13) \qquad \begin{cases} \Lambda(\sigma, \tau, \omega_1, \omega_2) = \Lambda\left(\sigma, \tau, \dfrac{-b_0 + i}{2c_0}, \dfrac{b_0 + i}{2c_0}\right) \\ \qquad = \Lambda\left(\sigma', \tau', \dfrac{-b'_0 + i}{2c'_0}, \dfrac{-b'_0 + i}{2c'_0}\right), \end{cases}$$

avec les conditions

$$(14) \qquad \begin{cases} \sigma' = \alpha\sigma + \alpha'\tau + \alpha'', \qquad \tau' = \beta\sigma + \beta'\tau + \beta'', \qquad \alpha\beta' - \beta\alpha' = 1, \\ a'_0 = a_0\alpha^2 + b_0\alpha\alpha' + c_0\alpha'^2, \\ b'_0 = 2a_0\alpha\beta + b_0(\alpha\beta' + \beta\alpha') + 2c_0\alpha'\beta', \\ c'_0 = a_0\beta^2 + b_0\beta\beta' + c_0\beta'^2, \end{cases}$$

où $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta''$ sont entiers. En d'autres termes, on a

$$(15) \qquad \Lambda(\sigma, \tau, \omega_1, \omega_2) = \Lambda(\sigma', \tau', \omega'_1, \omega'_2),$$

si

$$\sigma' = \alpha\sigma + \alpha'\tau + \alpha'', \qquad \tau' = \beta\sigma + \beta'\tau + \beta'',$$

et si, ω_1, $-\omega_2$ étant les racines de $a_0 + b_0\omega + c_0\omega^2 = 0$, ω'_1, $-\omega'_2$ sont celles de $a'_0 + b'_0\omega + c'_0\omega^2 = 0$ où a'_0, b'_0, c'_0 sont les coefficients de la forme $a'_0x'^2 + b'_0x'y' + c'_0y'^2$, qui se déduit de $a_0x^2 + b_0xy + c_0y^2$ par la substitution

$$x = \alpha x' + \beta y', \qquad y = \alpha' x' + \beta' y', \qquad \alpha\beta' - \beta\alpha' = 1,$$

$4a_0c_0 - b_0^2$ étant égal à 1.

Ainsi la fonction transcendante du système d'éléments σ, τ, b_0, c_0

$$\Lambda\left(\sigma, \tau, \frac{-b_0 + i}{2c_0}, \frac{b_0 + i}{2c_0}\right)$$

est un invariant analytique de l'équivalence

$$(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0) \backsim (\sigma', \tau', a'_0, b'_0, c'_0),$$

définie par les relations (14) et rencontrée déjà au paragraphe précédent.

La question qui se présente est donc de transformer la fonction Λ, de manière à mettre en évidence cette propriété invariante.

On a trouvé [§ 23, (11), (12)]

$$e^{\tau^2(\omega_1+\omega_2)\pi i}\,\mathfrak{I}(\sigma+\tau\omega_1,\omega_1)\,\mathfrak{I}(\sigma-\tau\omega_2,\omega_2)$$
$$=\mathrm{P}(\sigma,\tau,\omega_1,\omega_2)=-(\sqrt{c_0})\sum_{m,n}(-1)^{(m-1)(n-1)}e^{-\pi f(m,n)+2(m\sigma+n\tau)\pi i},$$
$$\mathfrak{I}'(0,\omega_1)\,\mathfrak{I}'(0,\omega_2)=c_0(a_0\mathrm{P}_{11}+b_0\mathrm{P}_{12}+c_0\mathrm{P}_{22})$$
$$=4\pi^2(\sqrt{c_0})^3\sum_{m,n}(-1)^{(m-1)(n-1)}f(m,n)e^{-\pi f(m,n)},$$
$$f(m,n)=a_0m^2+b_0mn+c_0n^2.$$

Ces formules, valables pour toutes les valeurs de σ, τ, donnent immédiatement, d'après la définition de Λ,

$$(16)\quad \begin{cases}\Lambda(\sigma,\tau,\omega_1,\omega_2)\\[4pt] \quad=\left[\dfrac{4\pi^2}{\mathfrak{I}'(0,\omega_1)\,\mathfrak{I}'(0,\omega_2)}\right]^{\frac{1}{3}} e^{\tau^2(\omega_1+\omega_2)\pi i}\,\mathfrak{I}(\sigma+\tau\omega_1,\omega_1)\,\mathfrak{I}(\sigma-\tau\omega_2,\omega_2)\\[8pt] \quad=\dfrac{\dfrac{1}{(\sqrt{c_0})}\mathrm{P}(\sigma,\tau,\omega_1,\omega_2)}{\left[\dfrac{1}{4\pi^2(\sqrt{c_0})}(a_0\mathrm{P}_{11}+b_0\mathrm{P}_{12}+c_0\mathrm{P}_{22})\right]^{\frac{1}{3}}}\\[8pt] \quad=-\dfrac{\sum\limits_{m,n}(-1)^{(m-1)(n-1)}e^{-\pi f(m,n)+2\pi i(m\sigma+n\tau)}}{\left[\sum\limits_{m,n}(-1)^{(m-1)(n-1)}f(m,n)e^{-\pi f(m,n)}\right]^{\frac{1}{3}}}\\[8pt] \quad=-\dfrac{\sum\limits_{m,n}(-1)^{mn+m+n}e^{-\pi f(m,n)+2\pi i(m\sigma+n\tau)}}{\left[\sum\limits_{m,n}(-1)^{mn+m+n}f(m,n)e^{-\pi f(m,n)}\right]^{\frac{1}{3}}}\end{cases}$$

également valable quels que soient σ, τ. C'est la représentation cherchée de la fonction Λ comme quotient de deux invariants (§ 26). Cherchons maintenant une représentation semblable pour $\log\Lambda$. L'équation (8) la fournit en substance; il reste seulement une difficulté relative à l'ordre des termes qui se trouvent échangés les uns dans les autres, quand on remplace les éléments σ, τ, a_0, b_0, c_0 par d'autres σ', τ', a'_0, b'_0, c'_0, équivalents, d'après les conditions (14). Nous avons levé cette difficulté par avance, en prouvant, au paragraphe précédent, que l'on peut remplacer l'équation (8)

par la suivante

$$(17)\quad \log \Lambda(\sigma, \tau, \omega_1, \omega_2) = \frac{-1}{2\pi} \lim_{\rho=0} \sum_{m,n} \frac{e^{2\pi i(m\sigma+n\tau)}}{(a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2)^{1+\rho}},$$

où le second membre est continu en ρ pour $\rho \geqq 0$.

Posons

$$a_0 = \frac{a}{\sqrt{-D}}, \qquad b_0 = \frac{b}{\sqrt{-D}}, \qquad c_0 = \frac{c}{\sqrt{-D}}, \qquad b^2 - 4ac = D,$$

a, b, c étant réels ou complexes et $\sqrt{-D}$ ayant partout la même détermination arbitraire d'ailleurs, pourvu que la partie réelle de

$$\frac{a}{\sqrt{-D}} x^2 + \frac{b}{\sqrt{-D}} xy + \frac{c}{\sqrt{-D}} y^2$$

soit une forme positive, ou, ce qui revient au même (§ **22**), pourvu que les parties imaginaires des racines

$$\omega_1 = \frac{-b_0 + i}{2c_0} = \frac{-b + i\sqrt{-D}}{2c}, \qquad -\omega_2 = \frac{-b_0 - i}{2c_0} = \frac{-b - i\sqrt{-D}}{2c}$$

de

$$c + b\omega + a\omega^2 = 0$$

soient positives. On aura

$$(18)\quad \begin{cases} \log \Lambda(\sigma, \tau, \omega_1, \omega_2) = -\dfrac{\sqrt{-D}}{2\pi} \lim\limits_{\rho=0} \sum\limits_{m,n}^{0} \dfrac{e^{2(m\sigma+n\tau)\pi i}}{(am^2 + bmn + cn^2)^{1+\rho}} \\ (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad \text{sauf} \quad m = n = 0), \end{cases}$$

$\sum\limits_{m,n}^{0}$ indiquant que l'on doit sommer d'abord par rapport à une variable et ensuite par rapport à l'autre, l'ordre des sommations, dans ces conditions, étant d'ailleurs indifférent.

La représentation (17) ou (18) de $\log \Lambda(\sigma, \tau, \omega_1, \omega_2)$ met en évidence sa propriété invariante.

En rapprochant (16) de (17) et en observant l'identité

$$f(m, n) = f(-m, -n),$$

avec sa conséquence évidente

$$\sum_{m,n} e^{2\pi i(m\sigma+n\tau)} f^{-1-\rho}(m, n) = \sum_{m,n} f^{-1-\rho}(m, n) \cos 2\pi(m\sigma + n\tau),$$

on obtient l'égalité remarquable

$$(19)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\displaystyle\sum_{m,n} (-1)^{(m-1)(n-1)} e^{-\pi f(m,n)+2\pi i(m\sigma+n\tau)}}{\left[\displaystyle\sum_{m,n} (-1)^{(m-1)(n-1)} f(m,n)\, e^{-\pi f(m,n)}\right]^{\frac{1}{3}}} \\ & = -e^{-\lim\limits_{\rho=0} \sum\limits_{m,n} 2\pi f(m,n)^{-1-\rho} \cos 2\pi(m\sigma+n\tau)}, \\ & m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad \text{sauf} \quad m = n = 0, \end{aligned} \right.$$

σ, τ étant assujettis aux conditions indiquées après (8) et

$$f(m, n) = a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2$$

étant une forme à partie réelle essentiellement positive, dont le discriminant $b_0^2 - 4a_0 c_0$ est égal à -1.

On peut aussi représenter $\Lambda(\sigma, \tau, \omega_1, \omega_2)$ comme un produit de deux facteurs dont chacun a un caractère particulier d'invariance ([1]). Posons

$$\left[\frac{2\pi}{\mathfrak{I}'(0, \omega)}\right]^{\frac{1}{3}} e^{(\sigma+\tau\omega)\tau\pi i} \mathfrak{I}(\sigma + \tau\omega, \omega) = \mathrm{A}(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0),$$

$$\omega = \frac{-b_0 + i}{2c_0}, \qquad 4a_0 c_0 - b_0^2 = 1,$$

la dernière relation définissant a_0, quand b_0 et c_0 sont donnés. On aura

$$\Lambda\left(\sigma, \tau, \frac{-b_0 + i}{2c_0}, \frac{b_0 + i}{2c_0}\right) = \mathrm{A}(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)\, \mathrm{A}(\sigma, -\tau, a_0, -b_0, c_0).$$

Les 3 arguments a_0, b_0, c_0 étant liés par une relation, la fonction *Alpha* dépend en réalité de 4 variables ou, pour mieux dire, de 2 paires de variables. D'après la formule (1), où l'on fait rentrer le sinus dans le produit, on obtient

$$\mathrm{A}(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0) = e^{\left[\left(\tau^2 - \tau + \frac{1}{6}\right)\omega + \sigma\tau - \sigma + \frac{1}{2}\right]\pi i} \prod_{n,\varepsilon} \left[1 - e^{2(n\omega+\varepsilon\sigma+\varepsilon\tau\omega)\pi i}\right],$$

([1]) KRONECKER, *Sitzungsberichte*, p. 310; 1889. La fonction $\mathrm{A}(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$ a été étudiée plus tard par Kronecker sous la forme $\mathrm{Atr}(u, v, w)$, u, v, w étant liés à σ, τ, a_0, b_0, c_0 par les relations $u = \sigma v + \tau w$, $(b_0 - i)v + 2c_0 w = 0$ (voir *Sitzungsberichte*, p. 220; 1890).

puis, à l'aide des formules de transformation déjà employées,

$$\mathfrak{I}(\zeta, \omega+1) = e^{\frac{\pi i}{4}}\mathfrak{I}(\zeta, \omega), \qquad \mathfrak{I}\left(\zeta, \frac{-1}{\omega}\right) = -i(\sqrt{-\omega i})\, e^{\zeta^2\omega\pi i}\mathfrak{I}(\zeta\omega, \omega),$$

$$\mathfrak{I}'\left(0, \frac{-1}{\omega}\right) = (\sqrt{-i\omega})^3\mathfrak{I}'(0, \omega),$$

en posant

$$\begin{array}{llllll} \sigma^{(1)} = \sigma - \tau, & \tau^{(1)} = \tau, & a_0^{(1)} = a_0 + b_0 + c_0, & b_0^{(1)} = b_0 + 2c_0, & c_0^{(1)} = c_0, \\ \sigma^{(2)} = \quad -\tau, & \tau^{(2)} = \sigma, & a_0^{(2)} = c_0, & b_0^{(2)} = -b_0, & c_0^{(2)} = a_0. \end{array}$$

$$\mathrm{A}(\sigma^{(1)}, \tau^{(1)}, a_0^{(1)}, b_0^{(1)}, c_0^{(1)}) = e^{\frac{\pi i}{6}}\mathrm{A}(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0),$$

$$\mathrm{A}(\sigma^{(2)}, \tau^{(2)}, a_0^{(2)}, b_0^{(2)}, c_0^{(2)}) = e^{\frac{\pi i}{2}}\mathrm{A}(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0).$$

De là résulte, comme pour (12), qu'on a en général

$$\mathrm{A}(\sigma', \tau', a'_0, b'_0, c'_0) = e^{\frac{h\pi i}{6}}\mathrm{A}(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0),$$

σ', τ', a'_0, b'_0, c'_0 ayant le même sens que dans (4) où l'on fait $\alpha'' = \beta'' = 0$, car les deux transformations précédentes sont pour $\frac{\sigma}{\tau}$ comme pour ω

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{C}^{-1}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{B},$$

et l'on a vu que, toute substitution $\begin{pmatrix} \beta' & \beta \\ \alpha' & \alpha \end{pmatrix}$ pouvant se représenter sous la forme

$$\mathrm{C}^{\lambda}\mathrm{B}^{\mu}\mathrm{C}^{\lambda'}\mathrm{B}^{\mu'}\ldots,$$

toute substitution $\begin{pmatrix} \beta' & -\beta \\ -\alpha' & \alpha \end{pmatrix}$ pourra corrélativement se représenter sous la forme

$$\mathrm{C}^{-\lambda}\mathrm{B}^{\mu}\mathrm{C}^{-\lambda'}\mathrm{B}^{\mu'}\ldots.$$

Le facteur $e^{\frac{h\pi i}{6}}$ ne pouvant par conséquent être qu'un produit de facteurs de la forme $e^{\frac{\pi i}{6}}$, $e^{\frac{\pi i}{2}}$ sera une racine douzième de l'unité. Donc la douzième puissance de A est inaltérée par les transformations (14), où $\alpha'' = \beta'' = 0$. $\mathrm{A}^{\frac{1}{2}}$ est une fonction analogue aux fonctions f de M. Weber dont nous aurons bientôt occasion de parler.

La relation précédente exprime d'une façon élégante le lien qui existe entre deux fonctions ϑ résultant l'une de l'autre par transformation linéaire. La fonction A satisfait à l'équation

$$\omega^2 \frac{\partial^2 A}{\partial \sigma^2} - 2\omega \frac{\partial^2 A}{\partial \sigma \, \partial \tau} + \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} = [(\sigma + \tau\omega)^2 \pi^2 A],$$

et Kronecker annonce que son logarithme peut se développer en série par le même procédé que $\log A(\sigma, \tau, \omega_1, \omega_2)$.

Avant de passer à la fonction A' nous exprimerons encore la fonction A sous une forme un peu différente. Dans l'équation

$$\frac{1}{(\sqrt{c_0})} P(\sigma, \tau, \omega_1, \omega_2) = \sum_{m,n} (-1)^{mn+m+n} e^{-(a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2)\pi + 2(m\sigma + n\tau)\pi i}$$

$$(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

considérons un couple quelconque m, n; soit t le plus grand commun diviseur des deux nombres pris en valeur absolue et

$$m = t\alpha, \qquad n = t\alpha';$$

on aura, puisque $t^2 = t \pmod 2$,

$$\frac{1}{(\sqrt{c_0})} P(\sigma, \tau, \omega_1, \omega_2)$$
$$= 1 + \sum_{\alpha, \alpha', t} (-1)^{(\alpha\alpha' + \alpha + \alpha')t} e^{-(a_0\alpha^2 + b_0\alpha\alpha' + c_0\alpha'^2)t^2\pi + 2(\alpha\sigma + \alpha'\tau)t\pi i},$$

où la sommation s'étend à tous les nombres positifs t et à tous les couples α, α' premiers entre eux. Les grandeurs

$$a_0\alpha^2 + b_0\alpha\alpha' + c_0\alpha'^2 \quad \text{et} \quad \alpha\sigma + \alpha'\tau,$$

formant alors l'ensemble de toutes les grandeurs équivalentes à a_0, σ dans l'équivalence précédemment considérée, on aura

$$(20) \qquad \frac{1}{(\sqrt{c_0})} P(\sigma, \tau, \omega_1, \omega_2) = 1 - \sum_{\sigma, a_0} \sum_{t=1}^{t=\infty} \varepsilon_t e^{-a_0 t^2 \pi + 2\sigma t \pi i},$$

où la première sommation s'étend aux éléments σ, a_0 de tous les systèmes équivalents $(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$ et où $\varepsilon_t = (-1)^{(\alpha\alpha' + \alpha + \alpha')t + 1}$.

On obtiendra de même, au lieu de

$$(21)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi^2(\sqrt{c_0})}(a_0 P_{11} + b_0 P_{12} + c_0 P_{22}) \\ \quad = \sum (-1)^{(m-1)(n-1)}(a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2) e^{-(a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2)\pi}, \end{cases}$$

$$(22)\quad \frac{1}{4\pi^2(\sqrt{c_0})}(a_0 P_{11} + b_0 P_{12} + c_0 P_{22}) = \sum_{a_0} \sum_{t=1}^{t=\infty} \varepsilon_t a_0 t^2 e^{-\pi a_0 t^2},$$

la première sommation s'étendant à tous les premiers éléments des formes équivalentes (a_0, b_0, c_0) et $\varepsilon_t = (-1)^{(\alpha\alpha' + \alpha + \alpha')t + 1}$.

Ainsi

$$(23)\quad \Lambda(\sigma, \tau, \omega_1, \omega_2) = -\frac{1 - \sum\limits_{\sigma, a_0} \sum\limits_{t=1}^{t=\infty} \varepsilon_t e^{-a_0 t^2 + 2\sigma t\pi i}}{\sum\limits_{a_0} \sum\limits_{t=1}^{t=\infty} \varepsilon_t a_0 t^2 e^{-a_0 t^2 \pi}}.$$

Posons alors

$$(24)\quad \frac{\Lambda(\sigma, \tau, \omega_1, \omega_2)}{f'(\sigma, \tau)} = \Lambda'(\sigma, \tau, \omega_1, \omega_2),$$

en rappelant que

$$f(x, y) = a_0 x^2 + b_0 xy + c_0 y^2, \qquad f'(x, y) = c_0 x^2 - b_0 xy + a_0 y^2,$$

et que, par suite

$$f'(\sigma, \tau) = c_0(\sigma + \tau\omega_1)(\sigma - \tau\omega_2);$$

on aura

$$(25)\quad \begin{cases} \Lambda'(\sigma, \tau, \omega_1, \omega_2) \\ \quad = \dfrac{(4\pi^2)^{\frac{1}{3}} e^{\tau^2(\omega_1 + \omega_2)\pi i}}{c_0[\mathfrak{I}'(0, \omega_1)\mathfrak{I}'(0, \omega_2)]^{\frac{1}{3}}} \dfrac{\mathfrak{I}(\sigma + \tau\omega_1, \omega_1)}{\sigma + \tau\omega_1} \dfrac{\mathfrak{I}(\sigma - \tau\omega_2, \omega_2)}{\sigma - \tau\omega_2}. \end{cases}$$

$f'(\sigma, \tau)$ est un invariant de l'équivalence

$$(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0) \backsim (\sigma', \tau', a'_0, b'_0, c'_0),$$

définie par les conditions (14) où $\alpha'' = \beta'' = 0$, car on vérifie sans peine que

$$\begin{aligned} & c'_0 \sigma'^2 - b'_0 \sigma'\tau' + a'_0 \tau'^2 \\ & = a_0(\beta\sigma' - \alpha\tau')^2 + b_0(\beta\sigma' - \alpha\tau')(\beta'\sigma' - \alpha'\tau') + c_0(\beta'\sigma' - \alpha'\tau')^2 \\ & = c_0\sigma^2 - b_0\sigma\tau + a_0\tau^2. \end{aligned}$$

Donc $\Lambda'(\sigma, \tau, \omega_1, \omega_2)$ est un semblable invariant et, par suite, *la fonction*

$$\Lambda'(0, 0, \omega_1, \omega_2) = \Lambda'\left(0, 0, \frac{-b_0+i}{2c_0}, \frac{b_0+i}{2c_0}\right)$$

est un invariant en ce sens qu'elle reste inaltérée pour toutes les formes (a_0, b_0, c_0) *qui se déduisent les unes des autres par une transformation de déterminant* 1.

De la définition (25) résulte

$$(26)\quad \Lambda'(0, 0, \omega_1, \omega_2) = \frac{4\pi^2}{c_0}\left[\frac{\vartheta'(0, \omega_1)}{2\pi}\,\frac{\vartheta'(0, \omega_2)}{2\pi}\right]^{\frac{2}{3}} = \frac{4\pi^2}{c_0}\,\eta^2(\omega_1)\,\eta^2(\omega_2),$$

ou, puisque

$$\vartheta'(0, \omega) = 2\pi e^{\frac{i\pi\omega}{4}} \prod_1^\infty (1 - e^{2ni\pi\omega})^3, \qquad c_0 = \frac{i}{\omega_1 + \omega_2},$$

$$(27)\quad \Lambda'(0, 0, \omega_1, \omega_2) = \frac{4\pi^2}{c_0}\, e^{\frac{-\pi}{6c_0}} \prod_1^\infty (1 - e^{2ni\pi\omega_1})^2 \prod_1^\infty (1 - e^{2ni\pi\omega_2})^2.$$

Les formules

$$c_0(a_0 P_{11} + b_0 P_{12} + c_0 P_{22}) = \vartheta'(0, \omega_1)\,\vartheta'(0, \omega_2)$$

$$\frac{1}{4\pi^2(\sqrt{c_0})}(a_0 P_{11} + b_0 P_{12} + c_0 P_{22}) = \sum (-1)^{(m-1)(n-1)} f(m, n)\, e^{-\pi f(m,n)}$$

$$= \sum_{a_0} \sum_{t=1}^{t=\infty} \varepsilon_t a_0 t^2 e^{-\pi a_0 t^2},$$

donnent encore, d'après (26),

$$(28)\quad \begin{cases} \Lambda'^{\frac{3}{2}}(0, 0, \omega_1, \omega_2) = (2\pi)^3 \sum\limits_{a_0} \sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \varepsilon_n a_0 n^2 e^{-a_0 n^2 \pi} \\ \qquad = (2\pi)^3 \sum\limits_{m,n} (-1)^{(m-1)(n-1)} f(m, n)\, e^{-\pi f(m,n)}. \end{cases}$$

De (26) et de la définition de Λ

$$\Lambda(\sigma, \tau, \omega_1, \omega_2) = (4\pi^2)^{\frac{1}{3}} e^{\tau^2(\omega_1+\omega_2)\pi i} \frac{\vartheta(\sigma + \tau\omega_1, \omega_1)\,\vartheta(\sigma - \tau\omega_2, \omega_2)}{[\vartheta'(0, \omega_1)\,\vartheta'(0, \omega_2)]^{\frac{1}{3}}},$$

résulte la relation

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} &\Lambda(\sigma, \tau, \omega_1, \omega_2)\sqrt{\Lambda'(0, 0, \omega_1, \omega_2)} \\ &\quad = 2\pi\left(\sqrt{-(\omega_1+\omega_2)i}\right) e^{\tau^2(\omega_1+\omega_2)i}\,\mathfrak{I}(\sigma+\tau\omega_1, \omega_1)\,\mathfrak{I}(\sigma-\tau\omega_2, \omega_2) \\ &\quad = 2\pi\sum_{m,n}(-1)^{mn+m+n}\, e^{-(a_0m^2+b_0mn+c_0n^2)\pi+2(m\sigma+n\tau)\pi i} \\ &\qquad\qquad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \end{aligned}\right.$$

et comme, d'après (28),

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} &\sqrt{\Lambda'(0, 0, \omega_1\omega_2)} \\ &\quad = 2\pi\left[\sum_{m,n}(-1)^{(m-1)(n-1)}(a_0m^2+b_0mn+c_0n^2)\, e^{-(a_0m^2+b_0mn+c_0n^2)\pi}\right]^{\frac{1}{3}} \\ &\qquad\qquad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \end{aligned}\right.$$

on obtient par (29) et (30) pour $\Lambda(\sigma, \tau, \omega_1, \omega_2)$, $\Lambda'(0, 0, \omega_1, \omega_2)$ des définitions qui portent en elles le caractère de l'invariance. Celle que l'on obtient pour $\Lambda(\sigma, \tau, \omega_1, \omega_2)$ ayant déjà été donnée avec un signe déterminé, on voit que la détermination de $\sqrt{\Lambda'(0, 0, \omega_1, \omega_2)}$ dans (29) et dans (30) est la même.

§ 29. La formule fondamentale de Kronecker (¹).

Il s'agit de calculer

$$\lim_{\rho=0}\left[\frac{1}{\rho}+\frac{1}{2\pi}\sum_{m,n} f^{-1-\rho}(m, n)\right],$$

$$m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \qquad \text{sauf} \qquad m = n = 0,$$

$$f(m, n) = a_0m^2+b_0mn+c_0n^2, \qquad 4a_0c_0-b_0^2-1,$$

la partie réelle de $f(m, n)$ étant une forme positive.

Considérons la fonction

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} &T(\rho, \sigma, \tau) \\ &\quad = \frac{1}{2\pi}\sum_{m,n}\frac{e^{2(m\sigma+n\tau)\pi i}}{f(m, n)} + \log\{\pi^2 f'(\sigma, \tau) - \frac{1}{2\pi}\sum_{m,n} f^{-1-\rho}(m, n) + \frac{1}{\rho}, \\ &\qquad f'(\sigma, \tau) = c_0\sigma^2 - b_0\sigma\tau + a_0\tau^2, \\ &\qquad m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad \text{sauf} \quad m = n = 0, \end{aligned}\right.$$

(¹) KRONECKER, *Sitzungsberichte*, p. 123; 1889.

et cherchons sa limite quand ρ, σ, τ supposés réels tendent vers zéro, ρ étant positif. Nous supposerons que, dans le premier terme du second membre, on somme par rapport à un indice, puis par rapport à l'autre, en sorte que ce terme représente

$$-\log \Lambda(\sigma, \tau, \omega_1, \omega_2).$$

Partons de la formule (§ 27, 1)

$$\frac{1}{h^{1+\rho}} = \frac{1}{\Gamma(1+\rho)} \int_0^\infty y^\rho e^{-hy}\, dy,$$

qui donne ici, d'après ce qui a été expliqué (§ 27 et § 14, 4),

$$\begin{aligned} T(\rho, \sigma, \tau) = \frac{1}{\rho} + \log 4\pi^2 f'(\sigma, \tau) + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \sum_{m,n} e^{-zf(m,n)+2(m\sigma+n\tau)\pi i}\, dz \\ - \frac{1}{2\pi\Gamma(1+\rho)} \int_0^\infty \sum_{m,n} z^\rho e^{-zf(m,n)}\, dz. \end{aligned}$$

Partageant le champ des intégrales en deux parties par la valeur 1 et remplaçant, dans la première partie, la série (¹)

$$\sum_{m,n} e^{-zf(m,n)+2\pi i(m\sigma+n\tau)}$$

par

$$-1 + \frac{2\pi}{z} e^{-\frac{4\pi^2}{z} f'(\sigma, \tau)} + \frac{2\pi}{z} \sum_{m,n} e^{-\frac{4\pi^2}{z} f'(\sigma+m, \tau+n)}$$

[§ 23, (19)], on obtient (§ 27)

$$\begin{aligned} T(\rho, \sigma, \tau) = & \frac{1}{\rho} + \log 4\pi^2 f'(\sigma, \tau) \\ & + \int_0^1 \left[\frac{-1}{2\pi} + \frac{1}{z} e^{-\frac{4\pi^2}{z} f'(\sigma,\tau)} + \frac{1}{z} \sum_{m,n} e^{-\frac{4\pi^2}{z} f'(\sigma+m, \tau+n)} \right] dz \\ & + \int_1^\infty \frac{1}{2\pi} \sum_{m,n} e^{-zf(m,n)+2\pi i(m\sigma+n\tau)}\, dz \\ & - \int_0^1 \left[\frac{-1}{2\pi} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z} \sum_{m,n} e^{-\frac{4\pi^2}{z} f'(m,n)} \right] \frac{z^\rho\, dz}{\Gamma(1+\rho)} \\ & - \int_1^\infty \sum_{m,n} z^\rho e^{-zf(m,n)} \frac{dz}{2\pi\Gamma(1+\rho)}. \end{aligned}$$

(¹) Dans la seconde intégrale figure la même série où l'on a fait $\sigma = \tau = 0$; la présence du facteur z^ρ assure la convergence de l'intégrale pour $z = 0$ tant que ρ est > 0.

La somme des fonctions placées sous les deux signes $\int_0^1$ peut s'écrire

$$\left[-\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{z}e^{-\frac{4\pi^2}{z}f'(\sigma,\tau)}\right]+\left[\frac{1}{2\pi}-\frac{1}{z}\right]\frac{z^\rho}{\Gamma(1+\rho)}$$
$$+\frac{1}{z}\sum_{m,n}\left[e^{-\frac{4\pi^2}{z}f'(\sigma+m,\tau+n)}-e^{-\frac{4\pi^2}{z}f'(m,n)}\right]$$
$$+\frac{1}{z\Gamma(1+\rho)}[\Gamma(1+\rho)-z^\rho]\sum_{m,n}e^{-\frac{4\pi^2}{z}f'(m,n)},$$

et celle des fonctions placées sous les signes $\int_1^\infty$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{m,n}e^{-zf(m,n)}[e^{2\pi i(m\sigma+n\tau)}-1]+\frac{1}{2\pi\Gamma(1+\rho)}[\Gamma(1+\rho)-z^\rho]\sum_{m,n}e^{-zf(m,n)}.$$

Distinguant alors autant d'intégrales qu'il y a d'expressions ainsi mises en évidence, on aura

$$\mathrm{T}(\rho,\sigma,\tau)=\frac{1}{\rho}+\log 4\pi^2 f'(\sigma,\tau)+\int_0^1\left[\frac{-1}{2\pi}+\frac{1}{z}e^{-\frac{4\pi^2}{z}f'(\sigma,\tau)}\right]dz$$
$$+\frac{1}{\Gamma(1+\rho)}\int_0^1\left(\frac{1}{2\pi}-\frac{1}{z}\right)z^\rho\,dz$$
$$+\int_0^1\sum_{m,n}\left[e^{-\frac{4\pi^2}{z}f'(\sigma+m,\tau+n)}-e^{-\frac{4\pi^2}{z}f'(m,n)}\right]\frac{dz}{z}$$
$$+\frac{1}{\Gamma(1+\rho)}\int_0^1[\Gamma(1+\rho)-z^\rho]\sum_{m,n}e^{-\frac{4\pi^2}{z}f'(m,n)}\frac{dz}{z}$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_1^\infty\sum_{m,n}e^{-zf(m,n)}[e^{2\pi i(m\sigma+n\tau)}-1]\,dz$$
$$+\frac{1}{2\pi\Gamma(1+\rho)}\int_1^\infty[\Gamma(1+\rho)-z^\rho]\sum_{m,n}e^{-zf(m,n)}\,dz.$$

Les quatre dernières intégrales ont pour limite o quand ρ, σ, τ tendent eux-mêmes vers o. En effet, la formule des accroissements finis donne, d'après une remarque de M. Darboux pour le

cas des expressions imaginaires,

$$e^{-\frac{4\pi^2}{z}f'(\sigma+m,\tau+n)} - e^{-\frac{4\pi^2}{z}f'(m,n)}$$

$$= e^{-\frac{4\pi^2}{z}f'(\sigma+m,\tau+n)} - e^{\frac{4\pi^2}{z}\,'(m,\tau+n)} + e^{\frac{4\pi^2}{z}f'(m,\tau+n)} - e^{\frac{4\pi^2}{z}f'(m,n)}$$

$$= \frac{-4\pi^2}{z}e^{-\frac{4\pi^2}{z}f'(\theta_1\sigma+m,\tau+n)}\lambda_1\sigma[2c_0(\theta_1\sigma+m)-b_0(\tau+n)]$$

$$-\frac{1}{4\pi^2}e^{-\frac{4\pi^2}{z}f'(m,\theta_2\tau+n)}\lambda_2\tau[2a_0(\theta_2\tau+n)-b_0 m)],$$

$$\Gamma(1+\rho)-z^\rho = \rho[\Gamma'(1+\theta_3\rho)+z^{\theta_3\rho}\log z],$$

$$e^{2\pi i(m\sigma+n\tau)}-1 = 2\pi i\lambda_4 m\sigma e^{2(m\theta_4\sigma+n\tau)\pi i}+2\pi i\lambda_5 n\tau e^{2\pi i n\theta_5\tau},$$

$(0<\theta_i<1;\quad i=1, 2, 3, 4, 5;\ \theta_1, \theta_2, \theta_3$ dépendent de z;
$0<|\lambda_j|<1;\quad j=1, 2, 4, 5;\quad \lambda_1, \lambda_2$ dépendent de z),

et l'on voit par là que les quatre intégrales en question se décomposent en six autres I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6 multipliées respectivement par σ, τ, ρ, σ, τ, ρ. Il est facile de voir que ces six intégrales sont finies. Vérifions-le seulement pour I_1.

Le module de

$$I_1 = \int_0^1 -\frac{4\pi^2}{z}\lambda_1\sum_{m,n}[2c_0(\theta_1\sigma+m)-b_0(\tau+n)]e^{-\frac{4\pi^2}{z}[f'(\theta_1\sigma+m,\tau+n)]}\frac{dz}{z}.$$

est évidemment inférieur à celui d'une intégrale de la forme

$$\int_0^1\sum_{m,n}(Am+Bn+C)e^{-\frac{4\pi^2}{z}f'(m,n)+\varphi}\frac{dz}{z^2},$$

φ étant une fonction linéaire de m, n.

Or ce module est évidemment fini puisque la série converge dans tout le champ [§ 14, 1].

Les six intégrales étant finies, il reste

$$\lim_{\substack{\rho=0\\ \sigma=0\\ \tau=0}} T(\rho,\sigma,\tau) = \lim_{\rho=0}\left[\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\Gamma(1+\rho)}\int_0^1\left(\frac{1}{2\pi}-\frac{1}{z}\right)z^\rho\,dz\right]$$

$$+\lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}}\left\{\log 4\pi^2 f'(\sigma,\tau)+\int_0^1\left(-\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{z}e^{-\frac{4\pi^2}{z}f'(\sigma,\tau)}\right)dz\right\}.$$

On peut intégrer la partie qui ne dépend que de ρ et il vient,

en posant $4\pi^2 f'(\sigma, \tau) = a$,

$$\lim_{\substack{\rho=0\\ \sigma=0\\ \tau=0}} T(\rho, \sigma, \tau) = \lim_{\rho=0}\left[\frac{1}{\rho} + \frac{1}{2\pi(1+\rho)\Gamma(1+\rho)} - \frac{1}{\rho\Gamma(1+\rho)}\right]$$

$$+ \lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}}\left[\log a + \int_0^1 e^{-\frac{a}{z}}\frac{dz}{z}\right] - \frac{1}{2\pi}$$

$$= \Gamma'(1) + \lim_{a=0}\left[\log a + \int_0^1 e^{-\frac{a}{z}}\frac{dz}{z}\right].$$

Pour évaluer la dernière limite faisons dans l'intégrale $\frac{1}{z} = x$ et remplaçant $\log a$ par son expression au moyen d'une intégrale définie (1),

$$\int_0^1 e^{-\frac{a}{z}}\frac{dz}{z} = \int_1^\infty \frac{e^{-ax}}{x}dx = -\operatorname{li} e^{-a},$$

$$\log a = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-ax}}{x}dx,$$

$$\log a + \int_0^1 e^{-\frac{a}{z}}\frac{dz}{z} = \int_0^1 \frac{e^{-x} - e^{-ax}}{x}dx + \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}dx$$

$$= \int_0^1 \frac{e^{-x} - 1}{x}dx + \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}dx + \int_0^1 \frac{1 - e^{-ax}}{x}dx.$$

La dernière intégrale s'annule avec a. Pour évaluer les deux

---

(1) b étant une quantité réelle positive, on a

$$\int_0^\infty e^{-bx}\,dx = \frac{1}{b}.$$

Intégrant par rapport à b de α à β, on obtient (le renversement des intégrations est facile à légitimer)

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}dx = \log\frac{\beta}{\alpha},$$

d'où, pour $\alpha = 1$, $\beta = z$,

$$\log z = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-zx}}{x}dx;$$

les fonctions de z qui figurent aux deux membres coïncidant, si l'on suppose maintenant z complexe (avec une partie réelle positive), le long de l'axe des valeurs réelles, coïncideront encore sur tout le plan, d'après un théorème connu de Riemann (voir le Cours de M. Hermite).

autres, partons de la formule rappelée au paragraphe précédent,

$$-\Gamma'(1) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x}\right) e^{-x}\,dx.$$

On en tire

$$\begin{aligned}
\Gamma'(1) &= \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx - \int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{1-e^{-x}} \text{ (1)}\\
&= \int_0^1 \frac{e^{-x}\,dx}{x} + \int_1^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x} - \int_0^1 \frac{e^{-x}\,dx}{1-e^{-x}} - \int_1^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{1-e^{-x}}\\
&= \int_0^1 \frac{e^{-x}-1}{x}\,dx + \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx - \int_0^1 \left(\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x}\right) dx - \int_1^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{1-e^{-x}}\\
&= \int_0^1 \frac{e^{-x}-1}{x}\,dx + \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx - \int_0^1 d\log\frac{1-e^{-x}}{x} - \int_1^\infty d\log(1-e^{-x}).
\end{aligned}$$

Les deux dernières intégrales ayant une somme nulle, il reste

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}-1}{x}\,dx + \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx = \Gamma'(1).$$

Donc

(2) $$\lim_{\substack{\rho=0\\ \sigma=0\\ \tau=0}} T(\rho, \sigma, \tau) = 2\,\Gamma'(1).$$

Remarquons que les calculs précédents fournissent une preuve de la formule connue

$$\log a - \mathrm{li}\,e^{-a} = \Gamma'(1) + \int_0^1 (1-e^{-ax})\frac{dx}{x},$$

qui aurait permis d'évaluer immédiatement la dernière limite cherchée.

La démonstration de Kronecker pour la formule (2) a été ici

---

(1) Donc, m étant entier

$$\begin{aligned}
\Gamma'(1) &= \lim_{m=\infty}\left[\int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-mx}}{x}\,dx - \int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-(m+1)x}}{1-e^{-x}}\,dx\right]\\
&= \lim_{m=\infty}\left[\log m - \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}\right)\right] = -C,
\end{aligned}$$

C étant la constante d'Euler.

simplifiée surtout par l'emploi de la relation

$$h^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty y^{a-1} e^{-hy}\, dy,$$

au lieu de celle que Dirichlet en déduit

$$h^{-a} = \frac{-1}{\Gamma(a+1)} \int_0^1 y^h\, d\left(\log \frac{1}{y}\right)^a,$$

et par le choix de la valeur particulière 1 pour décomposer le champ des intégrations.

En rapprochant les formules (1) et (2), on conclut

$$\begin{aligned} &\lim_{\rho=0} \left[\frac{-1}{\rho} + \frac{1}{2\pi} \sum_{m,n} \frac{1}{f(m,n)^{1+\rho}} \right] \\ &= -2\Gamma'(1) + \lim_{\substack{\sigma=0 \\ \tau=0}} \left[\log 4\pi^2 f'(\sigma,\tau) + \frac{1}{2\pi} \sum_{m,n} \frac{e^{2(m\sigma+\tau n)\pi i}}{f(m,n)} \right], \end{aligned}$$

la dernière série représentant la valeur de $-\log \Lambda(\sigma, \tau, \omega_1, \omega_2)$ dont la partie imaginaire est minimum. On en tire, [§ 28, (24)]

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} &\lim_{\rho=0} \left[\frac{-1}{\rho} + \frac{1}{2\pi} \sum_{m,n} \frac{1}{f(m,n)^{1+\rho}} \right] \\ &= -2\Gamma'(1) + 2\log 2\pi - \log \Lambda'(0, 0, \omega_1, \omega_2). \end{aligned} \right.$$

Posons

$$a_0 = \frac{a}{\sqrt{-D}}, \qquad b_0 = \frac{b}{\sqrt{-D}}, \qquad c_0 = \frac{c}{\sqrt{-D}}, \qquad D = b^2 - 4ac,$$

a, b, c étant réels ou complexes et $\sqrt{-D}$ ayant partout la même détermination, arbitraire d'ailleurs, pourvu que la partie réelle de

$$\frac{a}{\sqrt{-D}} x^2 + \frac{b}{\sqrt{-D}} xy + \frac{c}{\sqrt{-D}} y^2$$

soit une forme positive, ou, ce qui revient au même (§ 23), pourvu que les parties imaginaires des racines

$$\omega_1 = \frac{-b_0 + i}{2c_0} = \frac{-b + i\sqrt{-D}}{2c}, \qquad \omega_2 = \frac{b_0 + i}{2c_0} = \frac{b + i\sqrt{-D}}{2c}$$

soient positives. On aura [§ 28, (26), (27)]

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\lim_{\rho=0}\left[\frac{-1}{\rho}+\frac{1}{2\pi}\sum_{m,n}\left(\frac{\sqrt{-D}}{am^2+bmn+cn^2}\right)^{1+\rho}\right] \\ &= -2\Gamma'(1)+2\log 2\pi-\log\Lambda'(0,0,\omega_1,\omega_2), \end{aligned}\right.$$

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\lim_{\rho=0}\left[\frac{-1}{\rho}+\frac{1}{2\pi}\sum_{m,n}\left(\frac{\sqrt{-D}}{am^2+bmn+cn^2}\right)^{1+\rho}\right] \\ &= -2\Gamma'(1)+\log\frac{c}{\sqrt{-D}}-\log\left[\frac{\vartheta'(0,\omega_1)}{2\pi}\,\frac{\vartheta'(0,\omega_2)}{2\pi}\right]^{\frac{2}{3}}, \end{aligned}\right.$$

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\lim_{\rho=0}\left[\frac{-1}{\rho}+\frac{1}{2\pi}\sum_{m,n}\left(\frac{\sqrt{-D}}{am^2+bmn+cn^2}\right)^{1+\rho}\right] \\ &= -2\Gamma'(1)+\log\frac{c}{\sqrt{-D}}+\frac{\pi\sqrt{-D}}{6c}-2\log\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-e^{2n\omega_1\pi i})(1-e^{2n\omega_2\pi i}). \end{aligned}\right.$$

Le premier membre de ces formules est manifestement un invariant de la classe des formes $ax^2+bxy+cy^2$ qui sont équivalentes au sens de Gauss. Divisons les deux membres de (5) par $(\sqrt{-D})^{1+\rho}$ en observant les relations

$$\left(\frac{1}{\sqrt{-D}}\right)^{1+\rho}=\frac{1}{\sqrt{-D}}-\rho\frac{\log\sqrt{-D}}{\sqrt{-D}},$$

$$\left[\frac{\vartheta'(0,\omega)}{2\pi}\right]^{\frac{1}{3}}=e^{\frac{\pi i\omega}{12}}\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-e^{2n\omega\pi i})=\eta(\omega);$$

il viendra

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\lim_{\rho=0}\left[\frac{-1}{\rho\sqrt{-D}}+\frac{1}{2\pi}\sum_{m,n}\frac{1}{(am^2+bmn+cn^2)^{1+\rho}}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{-D}}\left[-2\Gamma'(1)+\log\frac{c}{-D}-2\log\eta(\omega_1)\eta(\omega_2)\right], \end{aligned}\right.$$

$\sqrt{-D}$ ayant partout la détermination pour laquelle

$$\frac{a}{\sqrt{-D}}x^2+\frac{b}{\sqrt{-D}}xy+\frac{c}{\sqrt{-D}}y^2$$

est une forme positive et les logarithmes (depuis leur introduction) ayant toujours la détermination où la partie imaginaire est minima.

Je signalerai ici quelques conséquences immédiates de la formule fondamentale (¹). On a, d'après (3),

$$(8)\quad \log \Lambda'(0,0,\omega_1,\omega_2) = 2\log 2\pi - 2\Gamma'(1) + \lim_{\rho=0}\left[\frac{1}{\rho} - \frac{1}{2\pi}\sum_{m,n} f(m,n)^{-1-\rho}\right]$$

ou, en rappelant que

$$\lim_{\rho=0}\left(\frac{1}{\rho} - \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^{1+\rho}}\right) = \Gamma'(1) \qquad (\S\ 27),$$

$$(9)\quad \begin{cases} \log \Lambda'(0,0,\omega_1,\omega_2) \\ \quad = 2\log 2\pi - \Gamma'(1) + \lim_{\rho=0}\left[\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^{1+\rho}} - \frac{1}{2\pi}\sum_{m,n}\frac{1}{f(m,n)^{1+\rho}}\right].\end{cases}$$

En introduisant la constante d'Euler $C = -\Gamma'(1)$ et le plus grand commun diviseur positif t de chaque couple m, n, on peut écrire

$$(10)\quad \begin{cases} \log \Lambda'(0,0,\omega_1,\omega_2) \\ \quad = 2\log 2\pi + C + \lim_{\rho=0}\left(\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^{1+\rho}} - \frac{1}{2\pi}\sum_{t=1}^{t=\infty}\frac{1}{t^{2+2\rho}}\sum_{a_0}\frac{1}{a_0^{1+\rho}}\right),\end{cases}$$

la dernière sommation s'étendant aux premiers coefficients de toutes les formes équivalentes (a_0, b_0, c_0), ou, en développant $\frac{1}{t^{2+2\rho}}$, d'après les observations faites au § 14,

$$\begin{aligned}&\log \Lambda'(0,0,\omega_1,\omega_2)\\ &\quad = \log 4\pi^2 + C\\ &\quad + \lim_{\rho=0}\left[\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^{1+\rho}} - \frac{1}{2\pi}\left(\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{t^2} - 2\rho\sum_{1}^{\infty}\frac{\log t}{t^2} + \ldots\right)\sum_{a_0}\frac{1}{a_0^{1+\rho}}\right].\end{aligned}$$

Or, on sait que

$$\sum\frac{1}{t^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{et que} \qquad \lim_{\rho=0}\rho\sum\frac{1}{a_0^{1+\rho}} = \lambda\pi \qquad (\S\ 17);$$

(¹) KRONECKER, *Sitzungsberichte*, p. 205; 1889.

donc, négligeant les termes qui s'annulent avec ρ et posant

$$C + 2\sum_{1}^{\infty}\frac{\log n}{n^2} = \log\mathfrak{S},$$

on obtiendra

$$(11)\qquad \log\Lambda'(0, 0, \omega_1, \omega_2) = \log 4\pi^2\mathfrak{S} + \lim_{\rho=0}\left(\sum_{1,\infty}^{n}\frac{1}{n^{1+\rho}} - \frac{\pi}{12}\sum_{a_0}\frac{1}{a_0^{1+\rho}}\right).$$

On a donc deux représentations de l'invariant $\Lambda'(0, 0, \omega_1, \omega_2)$ sous sa forme essentielle

$$(12)\qquad \Lambda'(0, 0, \omega_1, \omega_2) = 4\pi^2\left(\sum_{a_0}\sum_{1,\infty}^{n}\varepsilon_n a_0 n^2 e^{-a_0 n^2\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad [\S\ 27, (28)],$$

$$(13)\qquad \Lambda'(0, 0, \omega_1, \omega_2) = 4\pi^2\mathfrak{S}\lim_{\rho=0}\prod_{1,\infty}^{n} e^{n^{-1-\rho}}\prod_{a_0} e^{-\frac{\pi}{12}a_0^{-1-\rho}},$$

la sommation et le produit relatifs à a_0 s'étendant à tous les premiers coefficients des formes équivalentes à (a_0, b_0, c_0), dont les racines sont

$$\omega_1 = \frac{-b_0 + i}{c_0}, \qquad \omega_2 = \frac{b_0 + i}{c_0}, \qquad 4a_0c_0 - b_0^2 = 1,$$

la partie réelle de $a_0x^2 + b_0xy + c_0y^2$ étant une forme positive, ou, ce qui revient au même, les parties réelles de $\omega_1 i$, $\omega_2 i$ étant négatives.

La formule (9) donne aussi

$$\Lambda'(0, 0, \omega_1, \omega_2) = 4\pi^2 e^{C}\lim_{\rho=0}\prod_{1,\infty}^{n} e^{n^{-1-\rho}}\prod_{m,n} e^{-\frac{1}{2\pi}f^{-1-\rho}(m,n)}$$

$$(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad \text{sauf} \quad m = n = 0),$$

qui porte le caractère de l'invariance.

Si dans les formules précédentes on prend $\omega_1 = \omega_2$, donc $b_0 = 0$, $4a_0c_0 = 1$, $\omega_1 = \omega_2 = \frac{i}{2c_0}$, ou, en introduisant les intégrales elliptiques complètes,

$$\omega_1 = \omega_1 = \omega = \frac{iK'}{K}, \qquad a_0 = \frac{K'}{2K}, \qquad c_0 = \frac{K}{2K'},$$

on aura les quatre représentations suivantes de $\Lambda'(o, o, \omega, \omega)$

$$\Lambda'(o, o, \omega, \omega) = -2\omega(2\pi)^{\frac{2}{3}} i \mathfrak{S}'(o, \omega)^{\frac{4}{3}}$$

$$= -8\omega\pi^2 i e^{\frac{\omega\pi i}{3}} \prod_{1,\infty}^{n} (1 - e^{2n\omega\pi i})^4$$

$$= 4\pi^2 \left[\frac{1}{2KK'} \sum_{m,n} (-1)^{(m-1)(n-1)} (K^2 m^2 + K'^2 n^2) e^{-\frac{2\pi}{KK'}(K^2 m^2 + K'^2 n^2)} \right]^{\frac{2}{3}}$$

$$= 4\pi^2 e^{C} \lim_{\rho=0} \prod_{1,\infty}^{n} e^{n^{-1-\rho}} \prod_{m,n} e^{-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{K}{2K'} m^2 + \frac{K'}{2K} n^2\right)^{-1-\rho}}.$$

Si nous introduisons maintenant le module $x^2 = 1 - x'^2$, en observant les relations (1)

$$\sqrt{xx'} = \frac{\mathfrak{S}_{10}\mathfrak{S}_{01}\mathfrak{S}_{00}}{\mathfrak{S}_{00}^3} = \frac{\mathfrak{S}'_{11}}{\pi \mathfrak{S}_{00}^3}, \qquad \mathfrak{S}_{00}^2 = \frac{2K}{\pi},$$

d'où

(14) $$xx'(2K)^3 = \pi \mathfrak{S}'^2_{11},$$

et

$$\mathfrak{S}'_{11} = 2\pi q^{\frac{1}{4}} \prod_{1,\infty}^{n} (1 - q^{2n})^3, \qquad q = e^{-\pi\frac{K'}{K}},$$

d'où

(15) $$\begin{cases} (xx')^{\frac{2}{3}} = \dfrac{2^{\frac{4}{3}} q^{\frac{1}{3}} \prod\limits_{1,\infty}^{n} (1 - q^{2n})^4}{\mathfrak{S}_{00}^4}, \\ K^2 (2xx')^{\frac{2}{3}} = \pi^2 q^{\frac{1}{3}} \prod\limits_{1,\infty}^{n} (1 - q^{2n})^4, \end{cases}$$

nous obtiendrons, par comparaison de la première et de la troisième expression de $\Lambda'(o, o, \omega, \omega)$, d'après (14),

(16) $$xx' = \frac{\pi^3}{8\sqrt{2KK'}} \sum_{m,n} (-1)^{(m-1)(n-1)} \left(\frac{m^2}{K'^2} + \frac{n^2}{K^2}\right) e^{-\frac{2\pi}{KK'}(K^2 m^2 + K'^2 n^2)}$$

---

(1) H. WEBER, *Elliptische Functionen und algebraische Zahlen*, §§ 21, 37. La notation $\mathfrak{S}_{ik}$ signifie $\mathfrak{S}_{ik}(o, \omega)$.

et, par comparaison de la seconde et de la troisième expression,

$$q^{-\frac{1}{3}} \prod_{1,\infty}^{n} (1 - q^{2n})^{-4} = e^{-C} \frac{2K'}{K} \lim_{\rho=0} \prod_{1,\infty}^{n} e^{-n^{-1-\rho}} \prod_{m,n} e^{\frac{1}{2\pi}\left(\frac{K}{2K'} m^2 + \frac{K'}{2K} n^2\right)^{-1-\rho}},$$

d'où, en observant (15),

$$\pi^2 (2\varkappa\varkappa')^{-\frac{2}{3}} = e^{-C} 2KK' \lim_{\rho=0} \prod_{1,\infty}^{n} e^{-n^{-1-\rho}} \prod_{m,n} e^{\frac{1}{2\pi}\left(\frac{K}{2K'} m^2 + \frac{K'}{2K} n^2\right)^{-1-\rho}},$$

représentation remarquable de $\varkappa\varkappa'$ en produit infini.

Je rappellerai ici que M. Weber a donné une démonstration plus simple de la formule fondamentale de Kronecker, démonstration fondée, elle aussi, sur la représentation d'une puissance d'un nombre par une intégrale définie, mais qui suppose a_0, b_0, c_0 réels (1).

---

(1) *Elliptische Functionen*, § 113.

CHAPITRE IX.

INVARIANTS DES CLASSES DE FORMES QUADRATIQUES ARITHMÉTIQUES. VALEUR MOYENNE DE $\log \frac{4\pi^2}{\Lambda'}$.

§ 30. Rappel de résultats relatifs à la transformation (1).

Posons avec M. Weber

$$f(\omega) = q^{-\frac{1}{24}} \prod_{1,\infty}^{n} (1 + q^{2n-1}) = \frac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt[12]{\varkappa\varkappa'}}$$

$$= q^{-\frac{1}{24}}(1 + q + q^3 + q^4 + q^5 + q^6 + q^7 + 2q^8 + 2q^9 + \ldots),$$

$$f_1(\omega) = q^{-\frac{1}{24}} \prod_{1,\infty}^{n} (1 - q^{2n-1}) = \sqrt[6]{2}\sqrt[12]{\frac{\varkappa'^2}{\varkappa}}$$

$$= q^{-\frac{1}{24}}(1 - q - q^3 + q^4 - q^5 + q^6 - q^7 + 2q^8 - 2q^9 + \ldots),$$

$$f_2(\omega) = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{12}} \prod_{1,\infty}^{n} (1 + q^{2n}) = \sqrt[6]{2}\sqrt[12]{\frac{\varkappa^2}{\varkappa'}}$$

$$= \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{12}}(1 + q^2 + q^4 + 2q^6 + 2q^8 + 3q^{10} + \ldots),$$

$$\eta(\omega) = q^{\frac{1}{12}} \prod_{1,\infty}^{n} (1 - q^{2n}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \vartheta_{11}\left(\frac{2}{3}, \frac{\omega}{3}\right)$$

$$= q^{\frac{1}{12}} \sum_{-\infty,+\infty}^{n} (-1)^n q^{3n^2+n},$$

$$q = e^{i\pi\omega}, \qquad \sqrt{\varkappa} = \frac{\vartheta_{10}}{\vartheta_{00}}, \qquad \sqrt{\varkappa'} = \frac{\vartheta_{01}}{\vartheta_{00}};$$

(1) *Elliptische Functionen und algebraische Zahlen*, §§ 21, 29, 33, 47, 49, 71, 72, 73, 76, 77.

on aura (¹)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}_{00} &= \eta(\omega) f^2(\omega),\\
\mathfrak{I}_{01} &= \eta(\omega) f_1^2(\omega),\\
\mathfrak{I}_{10} &= \eta(\omega) f_2^2(\omega),\\
\mathfrak{I}'_{11} &= \pi \mathfrak{I}_{00}\mathfrak{I}_{01}\mathfrak{I}_{10} = 2\pi\eta^3(\omega),\\
f^8(\omega) &= f_1^8(\omega) + f_2^8(\omega),\\
f(\omega) f_1(\omega) f_2(\omega) &= \sqrt{2},
\end{aligned}$$

$$\eta\left(\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right) = \mathrm{E}\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \\ \gamma & \delta & \omega\end{pmatrix}\eta(\omega), \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

$$\mathrm{E}\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \\ \gamma & \delta & \omega\end{pmatrix} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) i^{\frac{\alpha-1}{2}} e^{\frac{\pi i}{12}[\alpha(\gamma-\beta)-(\alpha^2-1)\beta\delta]} \left(\sqrt{\alpha+\beta\omega}\right) \quad \text{si} \quad \alpha \text{ est impair et } > 0,$$

$= \left\{ \begin{array}{l} \text{la même expression où } \alpha, \beta, \gamma, \delta \\ \text{sont changés de signe} \end{array} \right\}$ si α est impair et < 0,

$$= \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) i^{\frac{1-\beta}{2}} e^{\frac{\pi i}{12}[\beta(\alpha+\delta)-(\beta^2-1)\alpha\gamma]} \sqrt{-i(\alpha+\beta\omega)} \quad \text{si} \quad \beta \text{ est impair et } > 0,$$

$= \left\{ \begin{array}{l} \text{la même expression où } \alpha, \beta, \gamma, \delta \\ \text{sont changés de signe} \end{array} \right\}$ si β est impair et < 0 (²).

$$\begin{aligned}
e^{-\pi i\beta v v'}\mathfrak{I}_{11}(v', \omega') &= \varepsilon^3\left(\sqrt{\alpha+\beta\omega}\right)\mathfrak{I}_{11}(v, \omega),\\
e^{-\pi i\beta v v'}\mathfrak{I}_{10}(v', \omega') &= i^{\beta} e^{-\frac{\pi i\alpha\beta}{4}} \varepsilon^3\left(\sqrt{\alpha+\beta\omega}\right)\mathfrak{I}_{1+\beta,\,1-\alpha}(v, \omega),\\
e^{-\pi i\beta v v'}\mathfrak{I}_{01}(v', \omega') &= i^{\delta-1} e^{-\frac{\pi i\gamma\delta}{4}} \varepsilon^3\left(\sqrt{\alpha+\beta\omega}\right)\mathfrak{I}_{1+\delta,\,1-\gamma}(v, \omega),\\
e^{-\pi i\beta v v'}\mathfrak{I}_{00}(v', \omega') &= i^{\delta+\beta-\alpha\delta} e^{-\frac{\pi i}{4}(\alpha\beta+\gamma\delta)} \varepsilon^3\left(\sqrt{\alpha+\beta\omega}\right)\mathfrak{I}_{1+\beta+\delta,\,1-\alpha-\gamma}(v, \omega)
\end{aligned}$$

(les indices étant pris selon le module 2),

$$\varepsilon\left(\sqrt{\alpha+\beta\omega}\right) = \mathrm{E}\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \\ \gamma & \delta & \omega\end{pmatrix},$$

$$\omega' = \frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}, \qquad v' = \frac{v}{\alpha+\beta\omega}.$$

(¹) Les fonctions $f(\omega)$, $f_1(\omega)$, $f_2(\omega)$ sont liées aux fonctions $\varphi(\omega)$, $\psi(\omega)$, $\chi(\omega)$ de M. Hermite par les relations

$$f(\omega) = \frac{\sqrt[6]{2}}{\chi(\omega)}, \qquad f_1(\omega) = \sqrt[6]{2}\,\frac{\psi(\omega)}{\chi(\omega)}, \qquad f_2(\omega) = \sqrt[6]{2}\,\frac{\varphi(\omega)}{\chi(\omega)}.$$

(²) Les deux expressions de $\mathrm{E}\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \\ \gamma & \delta & \omega\end{pmatrix}$ pour le cas où $\alpha \equiv \beta \equiv 1 \pmod 2$ sont concordantes (voir *Elliptische Functionen und algebraische Zahlen*, § 33).

et, en posant

$$\rho = e^{-\frac{2\pi i}{8}[\alpha(\gamma-\beta)-(\alpha^2-1)\beta\delta]},$$

$$f\left(\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right) = -\rho e^{-\frac{3\pi i}{8}\alpha(2\beta+\gamma)} f_1(\omega) \quad \text{si} \quad \alpha-\gamma \equiv 0 \pmod{2},$$
$$= -\rho e^{\frac{3\pi i}{8}\beta(2\alpha-\delta)} f_2(\omega) \quad \text{si} \quad \beta-\delta \equiv 0 \pmod{2},$$
$$= \left(\frac{2}{\alpha-\beta}\right)\rho e^{-\frac{3\pi i}{8}(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+\gamma-\delta)} f(\omega) \quad \text{si} \quad \alpha+\beta+\gamma-\delta \equiv 0 \pmod{2},$$

$$f_1\left(\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right) = \left(\frac{2}{\gamma}\right)\rho e^{-\frac{3\pi i}{8}\gamma(2\alpha-\delta)} f_2(\omega) \quad \text{si} \quad \delta \equiv 0 \pmod{2},$$
$$= \left(\frac{2}{\delta}\right)\rho e^{-\frac{3\pi i}{8}\delta(2\beta+\gamma)} f_1(\omega) \quad \text{si} \quad \gamma \equiv 0 \pmod{2},$$
$$= -\rho e^{-\frac{3\pi i}{8}\delta(2\beta+\gamma)} f(\omega) \quad \text{si} \quad \gamma-\delta \equiv 0 \pmod{2},$$

$$f_2\left(\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right) = \left(\frac{2}{\alpha}\right)\rho e^{\frac{3\pi i}{8}\alpha(2\gamma+\beta)} f_2(\omega) \quad \text{si} \quad \beta \equiv 0 \pmod{2},$$
$$= \left(\frac{2}{\beta}\right)\rho e^{\frac{3\pi i}{8}\beta(2\delta-\alpha)} f_1(\omega) \quad \text{si} \quad \alpha \equiv 0 \pmod{2},$$
$$= -\rho e^{\frac{3\pi i}{8}\beta(2\delta-\alpha)} f(\omega) \quad \text{si} \quad \alpha-\beta \equiv 0 \pmod{2}.$$

On peut remarquer, sur les formules de transformation des fonctions $\mathfrak{S}$, qu'il y a six classes de transformation correspondant aux six permutations des indices, d'après le Tableau suivant :

Ordre primitif des indices		00,	01,	10.
I.	$\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \pmod{2}$	00,	01,	10.
II.	$\equiv \begin{pmatrix}0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}$	00,	10,	01.
III.	$\equiv \begin{pmatrix}1 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}$	10,	00,	01.
IV.	$\equiv \begin{pmatrix}1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$	10,	01,	00.
V.	$\equiv \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 1 & 1\end{pmatrix}$	01,	00,	10.
VI.	$\equiv \begin{pmatrix}0 & 1 \\ -1 & 1\end{pmatrix}$	01,	10,	00.

Toutes les transformations de la première classe peuvent se composer au moyen des deux suivantes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

à condition de regarder comme identiques deux transformations qui se déduisent l'une de l'autre par le changement de signe des quatre nombres α, β, γ, δ (¹).

Les formules de transformation relatives aux fonctions $f(\omega)$, $f_1(\omega)$, $f_2(\omega)$ ont ceci de remarquable qu'elles réunissent chacune deux des six classes de transformation en une seule expression.

Les formules précédentes contiennent les suivantes :

$$\vartheta_{11}(v, \omega+1) = e^{\frac{\pi i}{4}} \vartheta_{11}(v), \qquad e^{-\frac{\pi i v^2}{\omega}} \vartheta_{11}\left(\frac{v}{\omega}, \frac{-1}{\omega}\right) = -i(\sqrt{-i\omega})\vartheta_{11}(v),$$

$$\vartheta_{10}(v, \omega+1) = e^{\frac{\pi i}{4}} \vartheta_{10}(v), \qquad e^{-\frac{\pi i v^2}{\omega}} \vartheta_{01}\left(\frac{v}{\omega}, \frac{-1}{\omega}\right) = (\sqrt{-i\omega})\vartheta_{10}(v),$$

$$\vartheta_{01}(v, \omega+1) = \vartheta_{00}(v), \qquad e^{-\frac{\pi i v^2}{\omega}} \vartheta_{10}\left(\frac{v}{\omega}, \frac{-1}{\omega}\right) = (\sqrt{-i\omega})\vartheta_{01}(v),$$

$$\vartheta_{00}(v, \omega+1) = \vartheta_{01}(v), \qquad e^{-\frac{\pi i v^2}{\omega}} \vartheta_{00}\left(\frac{v}{\omega}, \frac{-1}{\omega}\right) = (\sqrt{-i\omega})\vartheta_{00}(v),$$

$$\eta(\omega+1) = e^{\frac{\pi i}{12}} \eta(\omega), \qquad \eta\left(\frac{-1}{\omega}\right) = (\sqrt{-i\omega})\eta(\omega),$$

$$f(\omega+1) = e^{-\frac{\pi i}{24}} f_1(\omega), \quad f_1(\omega+1) = e^{-\frac{\pi i}{24}} f(\omega), \quad f_2(\omega+1) = e^{\frac{\pi i}{12}} f_2(\omega),$$

$$f_1\left(\frac{-1}{\omega}\right) = f_2(\omega), \quad f_2\left(\frac{-1}{\omega}\right) = f_1(\omega), \quad f\left(\frac{-1}{\omega}\right) = f(\omega),$$

$$f(\omega) = e^{-\frac{\pi i}{24}} \frac{\eta\left(\frac{\omega+1}{2}\right)}{\eta(\omega)}, \quad f_1(\omega) = \frac{\eta\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\eta(\omega)}, \quad f_2(\omega) = \sqrt{2}\,\frac{\eta(2\omega)}{\eta(\omega)},$$

(¹) On voit d'abord que le produit de deux transformations de la première classe est une transformation de la première classe. Ensuite le même raisonnement qui a été employé au § 6 conduit, en gardant les mêmes notations, les h étant supposés pairs, aux inégalités

$$|\alpha_{2i+1}| \leq |\beta_{2i}|\ |\beta_{2i}| \leq |\alpha_{2i-1}|,$$

et, comme les α sont impairs, puisque la transformation est de la première classe, on aura $\beta_{2n} = 0$, ce qui démontre la proposition.

Introduisons enfin les fonctions

$$j(\omega) = 2^8 \frac{(1-x^2x'^2)^3}{x^4x'^4} = q^{-2}(1-744q^2+196884q^3+\ldots)\,(^1),$$

$$\gamma_2(\omega) = \sqrt[3]{j(\omega)} = \sqrt[3]{2^8}\,\frac{1-x^2x'^2}{\sqrt[3]{x^4x'^4}} = q^{-\frac{2}{3}}(1+248q^2+\ldots),$$

$$\gamma_3(\omega) = \sqrt{j(\omega)-27.64} = \frac{8(2+x^2x'^2)(x'^2-x^2)}{x^2x'^2} = q^{-1}(1-492q^2+\ldots).$$

On peut écrire, d'après les formules précédentes,

$$\gamma_2(\omega) = \frac{f^{24}(\omega)-16}{f^8(\omega)} = \frac{f_1^{24}(\omega)-16}{f_1^8(\omega)} = \frac{f_2^{24}(\omega)-16}{f_2^8(\omega)},$$

$$\gamma_3(\omega) = \frac{[f^{24}(\omega)+8]\,[f_1^8(\omega)-f_2^8(\omega)]}{f^8(\omega)},$$

ou (²)

$$\gamma_2(\omega) = f^8(\omega)f_1^8(\omega)+f^8(\omega)f_2^8(\omega)-f_1^8(\omega)f_2^8(\omega),$$

$$\gamma_3(\omega) = \frac{1}{2}[f^8(\omega)+f_1^8(\omega)][f^8(\omega)+f_2^8(\omega)][f_1^8(\omega)-f_2^8(\omega)];$$

on voit que f^8, $-f_1^8$, $-f_2^8$ sont racines de l'équation cubique

$$f^{24}-\gamma_2 f^8-16 = 0,$$

d'où, en posant $f^{24} = u$,

$$(u-16)^3-u\,j(\omega) = 0,$$

(¹) La fonction $j(\omega)$ est égale à 27.64 J, J étant l'invariant absolu ainsi désigné par Halphen. L'avantage de cette notation, due à M. Weber, est que $j(\omega)$ est un *nombre algébrique* (voir *Acta mathematica*, t. XI, p. 335).

Il n'entre pas dans mon plan de donner ici plus de détails à cet égard. On trouvera ce qui concerne cette théorie dans les ouvrages plusieurs fois cités de M. Weber et de M. Dedekind.

(²) En désignant f^8, f_1^8, f_2^8 par a, b, c, on a

$$a = b+c, \qquad abc = 16,$$

$$\gamma_2 = \frac{a^3-16}{a} = \frac{a^3-abc}{a} = a^2-bc = a(b+c)-bc = ab+ac-bc,$$

$$\gamma_3 = \frac{(a^3+8)(b-c)}{a} = \frac{(2a^3+16)(b-c)}{2a} = \frac{(2a^3+abc)(b-c)}{2a}$$

$$= \frac{1}{2}(2a^2+bc)(b-c) = \frac{1}{2}[a^2+a(b+c)+bc](b-c)$$

$$= \frac{1}{2}(a+b)(a+c)(b-c).$$

équation dont les racines sont

$$f^{24}(\omega), \qquad -f_1^{24}(\omega) = f^{24}(\omega+1), \qquad -f_2^{24}(\omega) = f^{24}\left(1-\frac{1}{\omega}\right).$$

Les formules de transformations relatives à γ_2, γ_3 sont

$$\gamma_2\left(\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right) = e^{-\frac{2\pi i}{3}(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\delta-\alpha\beta^2\gamma)}\gamma_2(\omega),$$

$$\gamma_3\left(\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right) = (-1)^{\alpha\gamma+\beta\gamma+\beta\delta}\gamma_3(\omega),$$

d'où, en particulier,

$$\gamma_2(\omega+1) = e^{-\frac{2i\pi}{3}}\gamma_2(\omega), \qquad \gamma_2\left(\frac{-1}{\omega}\right) = \gamma_2(\omega),$$

$$\gamma_3(\omega+1) = -\gamma_3(\omega), \qquad \gamma_3\left(\frac{-1}{\omega}\right) = -\gamma_3(\omega).$$

On a déjà eu occasion d'observer que l'équation

$$x^2(\omega) = x^2(\omega')$$

entraîne

$$\omega = \frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}, \qquad \alpha\delta-\beta\gamma = 1, \qquad \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix} \pmod{2},$$

et l'on a exprimé l'invariant $x^2(\omega)$ sous sa forme essentielle. J'ajouterai ici que $x^2x'^2$ et, par conséquent, $f^{24}(\omega)$ appartiennent au groupe formé par les transformations de la première et de la seconde classe, c'est-à-dire qu'ils restent inaltérés par ces transformations et par celles-là seulement. Enfin $j(\omega)$ appartient au groupe formé par toutes les substitutions linéaires.

On sait que $x^2\left(\frac{-1}{\omega}\right) = x'^2(\omega)$ (*Elliptische Functionen und algebraische Zahlen*, § 40). Or, si

$$\omega = \frac{-b_0+i}{2c_0}, \qquad 4a_0c_0-b_0^2 = 1, \qquad a_0+b_0\omega+c_0\omega^2 = 0,$$

on aura

$$\frac{-1}{\omega} = \frac{b_0+i}{2a_0} = \omega', \qquad c_0-b_0\omega'+a_0\omega'^2 = 0.$$

Pour représenter l'invariant x'^2 sous sa forme essentielle, il suffira donc d'échanger a_0 et c_0 et de remplacer b_0 par $-b_0$ dans l'expression essentielle de x^2. Le produit de ces deux expres-

sions fournira une représentation de $x^2 x'^2$ sous sa forme essentielle, car les transformations de la première et de la seconde classe se composent des deux transformations élémentaires

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} (^1),$$

(*Op. cit.*, § 49) dont la première laisse inaltérés les deux facteurs du produit en question et la seconde les échange.

On aura ainsi la représentation de $f^{24}(\omega)$ sous sa forme essentielle et par conséquent aussi celle de

$$j(\omega) = \frac{(f^{24} - 16)^3}{f^{24}}$$

(voir encore l'Ouvrage de M. Weber, §§ 40, 47). C'est là une conséquence remarquable des résultats obtenus au § 25.

Comme toute transformation d'ordre n, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, a, b, c, d étant premiers entre eux et vérifiant la relation $ad - bc = n$, équivaut à une transformation du type

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \quad (a, c, d \text{ premiers entre eux et } ad = n),$$

suivie d'une transformation linéaire (²), toutes les valeurs de $j\left(\frac{c + d\omega}{a + b\omega}\right)$ $(ad - bc = n)$ sont celles de $j\left(\frac{c + d\omega}{a}\right)$ $(ad = n)$ dont le nombre est

$$\psi(n) = \sum_a \frac{a}{e} \varphi(e) = n \prod \left(1 + \frac{1}{p}\right) (^3),$$

a parcourant tous les diviseurs de n et e étant le plus grand commun diviseur de a, d; le produit Π s'étend à tous les facteurs premiers distincts p de n.

(¹) On le voit par le raisonnement employé au § 6. Si l'on y prend tous les h pairs, les transformations S_i appartiendront toutes à la classe de S et, selon cette classe, on aura $\beta_{2n} = 0$ ou $\alpha_{2n+1} = 0$, ce qui démontre la proposition. On regarde toujours comme identiques deux substitutions qui se déduisent l'une de l'autre par un changement de signe dans les quatre coefficients.

(²) *Elliptische Functionen und algebraische Zahlen*, § 25.

(³) *Ibid.*, § 71.

La fonction

$$\prod\left[v - j\left(\frac{c + d\omega}{a}\right)\right] \qquad (ad = n),$$

où le produit s'étend à toutes les grandeurs $j\left(\frac{c + d\omega}{a}\right)$ admettant toutes les substitutions linéaires est rationnelle en ω [1]. Nous la désignerons par $F_n[v, j(\omega)]$. L'équation des invariants pour la transformation d'ordre n

$$F_n[v, j(\omega)] = 0$$

jouit entre autres des propriétés suivantes.

Elle est irréductible, ce qui montre que les $\psi(n)$ grandeurs $j\left(\frac{c + d\omega}{a}\right)$ sont distinctes.

Si l'on pose $j(\omega) = u$, on a identiquement

$$F_n(u, v) = F_n(v, u), \qquad n > 1,$$
$$F_1(u, v) = u - v.$$

Les coefficients de v sont des polynomes entiers en u, à coefficients numériques entiers.

On en déduit qu'il existe entre $f(\omega) = u$ et $f\left(\frac{c + d\omega}{a}\right) = v$, $[ad = n \equiv 1 \pmod 2,\ c \equiv 0 \pmod{48}]$ une équation de transformation à coefficients numériques rationnels

$$\Phi_n(u, v) = 0\ [2].$$

§ 31. Multiplication complexe. Invariants de classe [3].

Si $\varphi(u)$ est une fonction admettant les deux périodes ω_1, ω_2, les conditions nécessaires et suffisantes pour que $\varphi(\mu u)$ considérée comme fonction de u admette les mêmes périodes, c'est-à-dire pour que

$$\varphi[\mu(u + \omega_i)] = \varphi(\mu u) \qquad (i = 1, 2),$$

---

[1] *Elliptische Functionen und algebraische Zahlen*, § 49.
[2] *Ibid.*, §§ 73, 76.
[3] *Ibid.*, §§ 86, 87, 88, 93.

quel que soit u, sont

$$\mu\omega_1 = a\omega_1 + b\omega_2,$$
$$\mu\omega_2 = c\omega_1 + b\omega_2,$$

a, b, c, d étant des entiers. Soit $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \omega$ celui des deux rapports $\frac{\omega_i}{\omega_k}$ $(i, k = 1, 2)$ qui a sa partie réelle positive; on déduit des relations précédentes

$$\text{(1)} \qquad \mu = a + b\omega, \qquad \omega = \frac{c + d\omega}{a + b\omega}.$$

Ces égalités ne peuvent être identiques que si $a = d$, $b = c = 0$, c'est-à-dire que si μ est entier. C'est le cas de la multiplication ordinaire. On sait qu'Abel le premier a signalé les valeurs *particulières* de ω satisfaisant aux égalités (1) considérées comme équations; ces valeurs devant être complexes pour être acceptables, μ sera lui-même alors toujours complexe et de là vient le nom de *multiplication complexe*. L'équation qui détermine ω peut s'écrire

$$\text{(2)} \qquad b\omega^2 + (a - d)\omega - c = 0,$$

d'où, en posant

$$ad - bc = n, \qquad 4n - (a + d)^2 = -D = \Delta > 0,$$

$$\text{(3)} \qquad \omega = \frac{-a + d + \sqrt{D}}{2b}, \qquad \mu = \frac{a + d + \sqrt{D}}{2}.$$

Inversement, soit une équation quadratique

$$A\omega^2 + B\omega + C = 0,$$

où A, B, C sont des entiers premiers entre eux et

$$\Delta = 4AC - B^2 > 0;$$

nous supposerons A et C positifs. On pourra trouver une infinité de nombres a, b, c, d vérifiant (2). L'identification donne, en effet,

$$\text{(4)} \qquad b = Ax, \qquad c = -Cx, \qquad a - d = Bx,$$

c'est-à-dire, en posant

$$a + d = y,$$

$$(5)\qquad \begin{cases} 2a = y + Bx, & b = Ax, \\ 2d = y - Bx, & c = -Cx, \end{cases}$$

d'où, pour la relation $ad - bc = n$

$$4n = y^2 + \Delta x^2 = y^2 - Dx^2.$$

La seule condition pour que a, b, c, d soient entiers est que $y + Bx$, $y - Bx$ soient pairs, donc

Si $D \equiv 0 \pmod 4$ $\quad y \equiv 0 \pmod 2$, $\quad x$ quelconque.
Si $D \equiv 1 \pmod 4$ $\quad x \equiv y \pmod 2$.

Si l'on veut que les nombres a, b, c, d ainsi trouvés soient premiers entre eux, il faut d'autres conditions. On voit par les relations (5) que le plus grand commun diviseur de a, b, c, d divise x, y et que celui de x, y divise $2a$, b, $2d$, c. Pour que a, b, c, d soient premiers entre eux, il faut donc et il suffit : 1° que x, y aient un plus grand commun diviseur $\leqq 2$; 2° si $x \equiv y \equiv 0 \pmod 2$, que l'on n'ait pas $y \equiv Bx \pmod 4$.

Supposons donnée une équation $A\omega^2 + B\omega + C = 0$ et déterminons a, b, c, d comme on vient de l'expliquer, de manière qu'ils n'aient pas de diviseur commun. On aura

$$j(\omega) = j\left(\frac{c + d\omega}{a + b\omega}\right),$$

et, en posant $j(\omega) = u$, on voit que *la valeur singulière de* $j(\omega)$, c'est-à-dire la valeur de $j(\omega)$ correspondant à un argument ω racine d'une équation quadratique, *vérifiera l'équation*

$$(6)\qquad F_n(u, u) = 0.$$

Réciproquement toute racine u de l'équation (6) *est un invariant singulier*. En effet, si u est racine de (6), une des racines $v = j\left(\frac{c + d\omega}{a}\right)$ $(ad = n)$ de $F(u, v) = 0$ sera égale à u, c'est-à-dire qu'on aura

$$j(\omega) = j\left(\frac{c + d\omega}{a}\right), \qquad \frac{c + d\omega}{a} = \frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \qquad ad = n.$$

et, par conséquent, ω est racine d'une équation quadratique.

L'équation quadratique $A\omega^2 + B\omega + C = 0$ se transforme par la substitution

$$(7) \qquad \omega = \frac{\gamma + \delta\omega'}{\alpha + \beta\omega'}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

en

$$A'\omega'^2 + B'\omega' + C' = 0,$$
$$A' = A\delta^2 + B\beta\delta + C\beta^2,$$
$$B' = 2A\delta\gamma + B(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2C\alpha\beta,$$
$$C' = A\gamma^2 + B\gamma\alpha + C\alpha^2.$$

La relation (7) entre les deux racines à parties imaginaires positives des formes (A, B, C), (A', B', C') étant la condition nécessaire et suffisante de leur équivalence, on voit que la valeur singulière $j(\omega)$ indépendante des transformations linéaires caractérise une classe de formes; nous dirons que $j(\omega)$ est un invariant de cette classe.

La valeur singulière $j(\omega) = u$ dont l'argument est racine de $A\omega^2 + B\omega + C = 0$ satisfait à l'équation

$$F_n(u, u) = 0,$$

toujours et seulement quand on a

$$4n = y^2 - Dx^2 = y^2 + \Delta x^2,$$

x et y ayant un plus grand commun diviseur $\leqq 2$ et $y + Bx$, $y - Bx$ n'étant pas simultanément divisibles par 4.

Cherchons à décomposer $F_n(u, u)$ en facteurs et, pour cela, posons

$$K_D(u) = \Pi[u - j(\omega)],$$

le produit s'étendant à tous les invariants des classes de discriminant D et le degré de $K_D(u)$ étant, par conséquent, K(D). $K_D(u)$ sera facteur de $F_n(u, u)$ et $F_n(u, u)$ sera divisible par $\Pi K_D(u)$, D parcourant tous les discriminants pour lesquels l'équation

$$4n = y^2 - Dx^2 = y^2 + \Delta x^2$$

a des solutions acceptables en x, y.

Je dis que $K_D(u)$ a toujours ses coefficients rationnels [1]. Sup-

---

[1] La théorie des nombres entiers algébriques permet alors de conclure qu'ils sont entiers.

posons-le prouvé pour tous les discriminants $D = -\Delta$ tels que $\Delta < 4n - 1$. A l'exception des valeurs

$$\Delta = 4n - 1 \qquad (x = \pm 1,\ y = \pm 1),$$
$$\Delta = 4n \qquad (x = \pm 1,\ y = 0),$$

toutes les valeurs de Δ pour lesquelles $4n = y^2 + \Delta x^2$ est résoluble sont $< 4n - 1$. Donc $F_n(u, u)$ étant divisible par le produit $\Pi K_D(u)$, il résulte de l'hypothèse que $K_{-4n}(u) K_{-4n+1}(u)$ a ses coefficients rationnels. Considérons maintenant $F_{4n-1}(u, u) = 0$. Cette équation est vérifiée pour tous les invariants relatifs aux discriminants D tels que l'équation

$$4(4n - 1) = y^2 - Dx^2 = y^2 + \Delta x^2$$

ait des valeurs acceptables en x, y. Or, pour $\Delta = 4n$, cette équation exigerait

$$y \equiv 0 \pmod 2) \qquad \text{soit} \qquad y = 2y', \qquad x^2 < 4, \qquad \text{donc} \qquad x^2 = 1,$$

et, par suite, $y'^2 = 3n - 1$, ce qui est impossible, tout carré étant de la forme $3n + 1$. Pour $\Delta = 4n - 1$, au contraire, l'équation considérée admet les solutions $x^2 = 4$, $y = 0$ qui sont acceptables [1]. Donc le plus grand commun diviseur des deux fonctions rationnelles

$$F_{4n-1}(u, u), \qquad K_{-4n}(u) K_{-4n+1}(u)$$

est $K_{-4n+1}(u)$ et, par conséquent, $K_{-4n}(u)$ et $K_{-4n+1}(u)$ sont rationnels.

Ce raisonnement est en défaut quand $n = 1$, car $F_1(u, u)$ est identiquement nul. Il faut donc démontrer directement que $K_{-3}(u)$ et $K_{-4}(u)$ sont rationnels. Les deux discriminants -3 et -4 donnent lieu chacun à une seule classe de formes. Prenons pour représenter ces classes les formes principales, c'est-à-dire

$(1, 1, 1)$ pour le discriminant -3,
$(1, 0, 1)$ pour le discriminant -4.

Dans le premier cas,

$$\omega = -1 - \frac{1}{\omega} = e^{\frac{2i\pi}{3}}.$$

---

[1] D étant $\equiv 1 \pmod 4$), B sera impair et de même a, d d'après (5).

Dans le second cas,

$$\omega = \frac{-1}{\omega} = i.$$

Or, on a vu que

$$\gamma_3\left(-\frac{1}{\omega}\right) = -\gamma_3(\omega), \qquad \gamma_2(\omega) = e^{-\frac{2i\pi}{3}}\gamma_2\left(-1-\frac{1}{\omega}\right),$$

donc

$$\gamma_3(i) = 0, \qquad \gamma_2\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = 0,$$

et, par suite,

$$j(i) = 27.64, \qquad j\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = 0,$$

$$K_{-3}(u) = u - 27.64, \qquad K_{-4}(u) = u.$$

Le théorème est ainsi démontré.

M. Weber, à qui j'emprunte ce bel exposé, sauf les modifications légères imposées par la notation de Kronecker, a donné à l'équation $K_D(u) = 0$ le nom d'*équation des classes*.

On étend le nom d'*invariant de classe* à toute *grandeur primitive* (1) α_i du corps algébrique $\mathcal{K}[j(\omega_i)]$, relatif à une racine quelconque $j(\omega_i)$ de l'équation $K_D(u) = 0$, et celui d'équation des classes à l'équation irréductible de degré $K(D)$ à laquelle satisfait α_i. Ainsi toute grandeur α_i fonction rationnelle de x_i et dont x_i est fonction rationnelle sera dite *invariant de classe*.

---

(1) $f(x) = 0$ étant une équation irréductible à coefficients rationnels ou considérés comme rationnels, dont les racines sont $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on appelle *corps algébrique* $\mathcal{K}(x_i)$ d'une racine x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ l'ensemble des fonctions rationnelles de cette racine. Soit $\alpha_i = R(x_i)$ l'une d'entre elles satisfaisant à une équation

$$\varphi(x) = \prod_{i=1}^{i=n}(x - \alpha_i) = 0,$$

évidemment rationnelle puisque ses coefficients sont fonctions symétriques des x_i. $\varphi(x)$ est irréductible ou puissance d'un polynome irréductible. En effet, désignons par $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ ses facteurs irréductibles; chacune des équations $\varphi_j(x) = 0, \ldots$ est vérifiée par une au moins des grandeurs $\alpha_i = R(x_i)$ et, par conséquent, par toutes, car $\varphi_j[R(x)] = 0$ ne peut admettre une des racines x_i de l'équation irréductible $f(x) = 0$ sans les admettre toutes. Donc les $\varphi_j(x)$ admettent chacune toutes les racines de $f(x)$ et sont par conséquent identiques, ce qui démontre la proposition.

Si $\varphi(x)$ est irréductible, les n valeurs *conjuguées* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont distinctes, et inversement si les n valeurs α_i sont distinctes, $\varphi(x)$ est irréductible d'après

Appliquons ces considérations à $f^{24}(\omega)$. On a vu que les racines de

$$(u-16)^3 - uj(\omega) = 0$$

sont

$$f^{24}(\omega),\quad f^{24}(\omega+1),\quad f^{24}\left(1-\frac{1}{\omega}\right).$$

Si ω satisfait à

$$A\omega^2 + B\omega + C = 0, \tag{8}$$

où nous supposons A, B, C premiers entre eux et $D = B^2 - 4AC \equiv 0 \pmod 4$, donc $B \equiv 0 \pmod 2$, $\omega' = \omega + 1$ satisfera à

$$A\omega'^2 + (B-2A)\omega' + A - B + C = 0, \tag{9}$$

et $\omega'' = 1 - \frac{1}{\omega}$ à

$$C\omega''^2 - (B+2C)\omega'' + A + B + C = 0. \tag{10}$$

A et C n'étant pas tous deux pairs, une et une seule des équations (8), (9), (10) a ses coefficients extrêmes impairs. Cherchons à former une équation $\Phi(u) = 0$ à coefficients numériques rationnels à laquelle satisfasse une seule des trois racines $f^{24}(\omega)$, $f^{24}(\omega+1)$, $f^{24}\left(1-\frac{1}{\omega}\right)$ de

$$(u-16)^3 - uj(\omega) = 0. \tag{11}$$

Cette racine sera alors une fonction rationnelle de $j(\omega)$ qu'on

---

le théorème précédent. On dit alors que α_i est une ***grandeur primitive*** du corps $\mathcal{K}(x_i)$. Supposons que α_i soit une grandeur primitive de $\mathcal{K}(x_i)$, et soit ρ_i une fonction rationnelle de x_i. La fonction

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\rho_i}{x-\alpha_i}\right)\varphi(x) = \Phi(x),$$

symétrique par rapport aux x_i, est rationnelle. Or, pour $x = \alpha_i$, $\varphi(\alpha_i) = 0$, on tire

$$\rho_i = \frac{\Phi(\alpha_i)}{\varphi'(\alpha_i)},$$

donc ρ_i est rationnelle en α_i. Ainsi, toutes les fonctions rationnelles de x_i sont rationnellement exprimables en α_i; donc, en particulier, x_i sera rationnellement exprimable par α_i.

Évidemment toute grandeur α_i fonction rationnelle de x_i et dont x_i est fonction rationnelle est une grandeur primitive du corps $\mathcal{K}(x_i)$, car, si $\alpha_i = R(x_i)$ et $\alpha_k = R(x_k)$ étaient égales, on en tirerait pour x_i et x_k des valeurs égales.

obtiendra en annulant le plus grand commun diviseur de $\Phi(u)$ et de (11); et comme, d'après (11), $j(\omega)$ est rationnellement exprimable par cette racine, elle sera un invariant de classe.

Or, on sait qu'entre les fonctions

$$(12)\quad u = f^{24}(\omega), \qquad v = f^{24}\left(\frac{c+d\omega}{a}\right), \qquad c \equiv 0 \pmod{48}, \qquad ad = n$$

existe pour n impair une équation de transformation

$$\Phi_n(u, v) = 0$$

et que, par conséquent, l'équation

$$\Phi_n(u, u) = 0$$

sera satisfaite toujours et seulement quand pour une des grandeurs (12), on a

$$(13)\qquad \frac{c+d\omega}{a} = \frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \qquad ad = n,$$

avec

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{2},$$

ou

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \pmod{2},$$

c'est-à-dire si $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ est une transformation de la première ou de la seconde classe.

Tout revient donc à chercher un degré *impair* n de transformation tel qu'on puisse déterminer des entiers a, c, d, α, β, γ, δ vérifiant

$$ad = n, \qquad c \equiv 0 \pmod{48},$$
$$a,\ c,\ d \text{ premiers entre eux},$$
$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \qquad \beta \equiv \gamma \equiv \alpha + 1 \equiv \delta + 1 \pmod{2},$$

et rendant (13) identique à *une seule* des équations (8), (9), (10). Soit

$$(14)\qquad \mathcal{A}\Omega^2 + \mathcal{B}\Omega + \mathcal{C} = 0$$

cette équation dont nous savons seulement que

$$4\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2 = -D = \Delta \equiv 0 \pmod{4},$$
$$\mathcal{B} \equiv 0 \pmod{2}$$

et que $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, sont premiers entre eux, Ω désignant la racine à partie imaginaire positive.

L'identification de (13) avec (14) donne

$$(15)\qquad d\beta = \mathcal{A}x, \qquad c\alpha - a\gamma = \mathcal{C}x,$$

$$(16)\qquad c\beta + d\alpha - a\delta = \mathcal{B}x;$$

posons

$$(17)\qquad c\beta - d\alpha - a\delta = y;$$

il viendra

$$(18)\qquad \begin{cases} 2d\alpha = \mathcal{B}x - y, \\ 2(c\beta - a\delta) = \mathcal{B}x + y; \end{cases}$$

(15) et (18) donnent

$$4d\beta(c\alpha - a\gamma) - 4d\alpha(c\beta - a\delta) = \Delta x^2 + y^2,$$
$$4n(\alpha\delta - \beta\gamma) = y^2 + \Delta x^2,$$

d'où l'équation équivalente à $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$

$$(19)\qquad 4n = y^2 + \Delta x^2.$$

Supposons d'abord $\mathcal{A}$ premier à n (restriction que nous écarterons ensuite). Alors, d'après (15), x est divisible par d ainsi que $c\alpha - a\gamma$ et, d'après (16), $c\beta - a\delta$. Donc

$$\beta(c\alpha - a\gamma) - \alpha(c\beta - a\delta) \quad \text{ou} \quad a$$

et

$$\delta(c\alpha - a\gamma) - \gamma(c\beta - a\delta) \quad \text{ou} \quad c$$

sont divisibles par d. Donc a, c, d devant être premiers entre eux, il faut que $d = 1$; donc $a = n$. En résolvant (15) et (18), on obtient alors directement

$$(20)\qquad \begin{cases} 2\alpha = \mathcal{B}x - y, & \beta = \mathcal{A}x, \\ 2n\gamma = c(\mathcal{B}x - y) - 2\mathcal{C}x, & 2n\delta = 2c\mathcal{A}x - \mathcal{B}x - y. \end{cases}$$

Pour que γ, δ soient entiers, il faut que c vérifie les deux congruences

$$(21)\qquad c\mathcal{A}x \equiv \frac{\mathcal{B}x + y}{2} \pmod{n}, \qquad c\,\frac{\mathcal{B}x - y}{2} \equiv \mathcal{C}x \pmod{n}$$

[Δ, $\mathcal{B}$, y sont pairs d'après les hypothèses et la conséquence (19)];

ces congruences sont toujours compatibles, car on a

$$c(y^2 + \Delta x^2) \equiv 0 \quad (\text{mod } 4n),$$
$$c(\mathfrak{B}^2 x^2 - y^2) \equiv 4\mathfrak{A}\mathfrak{C} c x^2 \quad (\text{mod } 4n),$$
$$c\,\frac{\mathfrak{B}x + y}{2}\,\frac{\mathfrak{B}x - y}{2} \equiv c\mathfrak{A}x.\mathfrak{C}x \quad (\text{mod } n),$$

et, par suite, les deux congruences (21) résultent l'une de l'autre et servent à déterminer c qu'on pourra rendre $\equiv 0\,(\text{mod } 48)$, en lui ajoutant au besoin un multiple de n.

Choisissons alors n de la façon suivante :

Si $D \equiv 4 \pmod 8$, prenons $4n = -D$, $x = 1$, $y = 0$; on aura

$$(22)\qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{\mathfrak{B}}{2}, & \beta = \mathfrak{A}, \\ \gamma \equiv \mathfrak{C}, & \delta = \dfrac{\mathfrak{B}}{2}, \end{cases} \qquad (\text{mod } 2);$$

Si $D \equiv 0 \pmod 8$, prenons $4n = -D + 4$, $x = 1$, $y = \pm 2$; il viendra

$$(23)\qquad \begin{cases} \alpha \equiv \dfrac{\mathfrak{B}}{2} + 1, & \beta = \mathfrak{A}, \\ \gamma \equiv \mathfrak{C}, & \delta \equiv \dfrac{\mathfrak{B}}{2} + 1. \end{cases} \qquad (\text{mod } 2);$$

β, γ devant être de même parité, et $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ ne pouvant avoir la même parité sans être tous deux impairs, la transformation $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ donnée par (22) ou (23) sera de la forme $\equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \pmod 2$, et l'on voit qu'en vérifiant les conditions imposées à n, a, c, d, α, β, γ, δ, on peut, quand $\mathfrak{A}$ est premier à n, identifier (13) toujours et seulement avec celle des équations (8), (9), (10) dont les coefficients extrêmes sont impairs. Ω étant la racine de cette équation, $f^{24}(\Omega)$ un invariant de classe.

On peut maintenant enlever la restriction que $\mathfrak{A}$ soit premier à n. Appliquons en effet à Ω une transformation linéaire; l'équation

$$\mathfrak{A}\Omega^2 + \mathfrak{B}\Omega + \mathfrak{C} = 0$$

se changera en une autre

$$\mathfrak{A}'\Omega'^2 + \mathfrak{B}'\Omega' + \mathfrak{C}' = 0,$$

où

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A}\delta^2 + \mathcal{B}\beta\delta + \mathcal{C}\beta^2 \equiv \mathcal{A}\delta^2 + \mathcal{C}\beta^2 \pmod 2,$$
$$\mathcal{B}' = 2\mathcal{A}\delta\gamma + \mathcal{B}(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2\mathcal{C}\alpha\beta,$$
$$\mathcal{C}' = \mathcal{A}\gamma^2 + \mathcal{B}\gamma\alpha + \mathcal{C}\alpha^2 \equiv \mathcal{A}\gamma^2 + \mathcal{C}\alpha^2 \pmod 2.$$

On pourra trouver β, δ tels que $\mathcal{A}'$ soit premier à $2n$ (§ 9), donc de parités différentes, puis α, γ satisfaisant à $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. En remplaçant au besoin α, γ par $\alpha + \lambda\beta$, $\gamma + \lambda\delta$, on peut les supposer de parités différentes et par conséquent $\mathcal{C}'$ impair. La transformation en question sera donc de la première ou de la seconde classe et laissera $f^{24}(\omega)$ inaltérée. Donc on aura

$$f^{24}(\Omega') = f^{24}(\Omega).$$

L'analyse précédente est en défaut si $n = 1$, car alors $a = d = 1$, $c = 0$, donc $u = v$ et, $\Phi_n(u, v)$ ayant le facteur $u - v$, $\Phi_n(u, u)$ s'évanouit. C'est d'ailleurs le seul cas où cela arrive, car de $f\left(\frac{c + d\omega}{a}\right) = f(\omega)$ résulterait

$$j\left(\frac{c + d\omega}{a}\right) = j(\omega),$$

ce qui est impossible, puisque $j(\omega) = j(\omega')$ exige $\omega' = \frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ [il s'agit ici de la présence du facteur $u - v$ dans $\Phi_n(u, v)$ ou dans $F_n(u, v)$ et par conséquent d'invariants non singuliers]. Pour le cas $n = 1$, D étant pair sera égal à -4. Il n'y aura donc qu'une classe représentable par $(1, 0, 1)$, $\omega = \frac{-1}{\omega} = i$. On conclut alors des relations

$$f^8(\omega) = f_1^8(\omega) + f_2^8(\omega),$$
$$f(\omega) f_1(\omega) f_2(\omega) = \sqrt{2},$$
$$f_1(\omega) = f_2\left(\frac{-1}{\omega}\right), \qquad f_1(i) = f_2(i),$$
$$f^{24}(i) = 64;$$

$f^{24}(\omega)$ étant fonction rationnelle de $j(\omega)$ sera un invariant.

En résumé, si $A \equiv C \equiv 1 \pmod 2$, des trois équations (8), (9), (10), la première seule a ses coefficients extrêmes impairs et, d'après ce qui précède, $f^{24}(\omega)$ est un invariant.

Si $A \equiv 1$, $C \equiv 0 \pmod 2$, c'est l'équation (9) qui a ses coefficients extrêmes impairs ; donc $f^{24}(\omega + 1) = -f_1^{24}(\omega)$ ou simplement $f_1^{24}(\omega)$ est un invariant.

Si $A \equiv 0$, $C \equiv 1 \pmod 2$, c'est l'équation (10) qui a ses coefficients extrêmes impairs; donc $f^{24}\left(1-\frac{1}{\omega}\right) = -f_2^{24}(\omega)$ ou simplement $f_2^{24}(\omega)$ est un invariant.

On suppose toujours $D = B^2 - 4AC \equiv 0 \pmod 4$.

Il est bien entendu que, de la relation birationnelle qui lie $f^{24}(\omega)$ par exemple à $j(\omega)$, quand $f^{24}(\omega)$ est un invariant, on ne peut conclure que $f^{24}(\omega) = f^{24}\left(\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right)$, puisque cette relation n'est pas identiquement birationnelle [on a toujours $(f^{24}(\omega)-16)^3 - f^{24}(\omega)\,j(\omega) = 0$]; seulement, pour certaines valeurs de ω — en nombre infini d'ailleurs et déterminées par ce qui précède — la *valeur numérique* de $f^{24}(\omega)$ est fonction rationnelle de la *valeur numérique* de $j(\omega)$.

§ 32. Valeur moyenne de l'invariant $\log \frac{4\pi^2}{\Delta'(0, 0, \omega_1, \omega_2)}$ (¹).

Nous supposerons dans ce qui suit que (a, b, c) est toujours une forme positive de discriminant

$$b^2 - 4ac = D = D_0 Q^2 = -\Delta < 0,$$

où a est premier à Q, $b \equiv 0 \pmod Q$, $c \equiv 0 \pmod{Q^2}$: on sait que, dans chaque classe de discriminant D, il y a toujours des formes remplissant ces conditions. Reprenons alors la formule (19) du § 16, où nous poserons

$$d = Q'_\alpha, \qquad Q = Q_\alpha Q'_\alpha, \qquad \left(a, \frac{b}{d}, \frac{c}{d^2}\right) = (a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha);$$

elle donne alors avec l'équation (7) du § 15

$$\frac{\tau}{K(D)} \sum_{h=1}^{h=\infty} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{D}{h}\right)\left(\frac{Q^2}{k}\right) F(hk)$$
$$= \sum_{\alpha} \sum_{a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha} \sum_{m,n} \varepsilon_{Q'_\alpha} \frac{F[(a_\alpha m^2 + b_\alpha mn + c_\alpha n^2) Q'^2_\alpha]}{K(D_0 Q^2_\alpha)}$$

(¹) Voir pour ce paragraphe et le suivant KRONECKER, *Sitzungsberichte*, p. 256-274 et 211-220; 1889.

ou, en choisissant

$$F(n) = n^{-1-\rho}$$

et en multipliant les deux membres par $|D|^{\frac{1+\rho}{2}}$,

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\tau|D|^{\frac{1+\rho}{2}}}{K(D)}\rho\sum_1^\infty\left(\dfrac{D}{h}\right)h^{-1-\rho}\sum_1^\infty\left(\dfrac{Q^2}{k}\right)k^{-1-\rho} \\ \quad = \rho|D|^{\frac{1+\rho}{2}}\sum_\alpha \varepsilon_{Q'_\alpha}\dfrac{Q'^{-2-2\rho}_\alpha}{K(D_0Q_\alpha^2)}\sum_{a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha}(a_\alpha m^2 + b_\alpha mn + c_\alpha n^2)^{-1-\rho}. \end{cases}$$

En se rappelant les notations

$$\sum_1^\infty\left(\frac{D}{h}\right)\frac{1}{h} = H(D) = \frac{2\pi K(D)}{\tau\sqrt{-D}}$$

et

$$\overline{H}(D) = \sum_1^\infty\left(\frac{D}{h}\right)\frac{\log h}{h},$$

on obtient (§ 14), pour la dérivée logarithmique de la série

$$\sum_1^\infty\left(\frac{D}{h}\right)\left(\frac{\sqrt{|D|}}{h}\right)^{1+\rho} \qquad (\rho > -1),$$

quand ρ est $= 0$,

$$\mathfrak{H}(D) = -\frac{\overline{H}(D)}{H(D)} + \frac{1}{2}\log|D|,$$

et, par suite, en développant suivant les puissances de ρ (§ 14)

$$(2)\qquad \frac{\tau|D|^{\frac{1+\rho}{2}}}{K(D)}\sum_1^\infty\left(\frac{D}{h}\right)h^{-1-\rho} = 2\pi[1 + \rho\,\mathfrak{H}(D)] \qquad (\operatorname{mod} \rho^2),$$

en entendant par là que le développement du premier membre coïncide avec le second aux puissances près de ρ qui sont supérieures ou égales à la seconde.

Les notations du § 16 permettent ensuite d'écrire

$$\sum_1^\infty\left(\frac{Q^2}{k}\right)k^{-1-\rho} = \sum_\alpha\sum_{1,\infty}^{k}\varepsilon_{Q'_\alpha}(kQ'_\alpha)^{-1-\rho} = \sum_\alpha \varepsilon_{Q'_\alpha}Q'^{-1-\rho}_\alpha\sum_{1,\infty}^{k}k^{-1-\rho}.$$

Or on a

$$\rho\sum_{1}^{\infty} k^{-1-\rho} \equiv 1+\rho C \pmod{\rho^2},$$

$$\sum_{\alpha} \varepsilon_{Q'_\alpha} Q'^{-1-\rho}_\alpha \equiv \sum_{\alpha} \varepsilon_{Q'_\alpha} Q'^{-1}_\alpha - \rho \sum_{\alpha} \varepsilon_{Q'_\alpha} Q'^{-1}_\alpha \log Q'_\alpha \pmod{\rho^2};$$

donc, en posant

$$\sum_{\alpha} \varepsilon_{Q'_\alpha} Q'^{-1}_\alpha = S(Q), \qquad \sum_{\alpha} \varepsilon_{Q'_\alpha} Q'^{-1}_\alpha \log Q'_\alpha = \bar{S}(Q),$$

$$(3) \qquad \rho\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{Q^2}{k}\right) k^{-1-\rho} \equiv (1+\rho C)\, S(Q) - \rho\, \bar{S}(Q) \pmod{\rho^2},$$

et, par suite, d'après (2),

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{\tau |D|^{\frac{1+\rho}{2}}}{K(D)} \rho \displaystyle\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{D}{h}\right) h^{-1-\rho} \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{Q^2}{k}\right) k^{-1-\rho} \\ \equiv 2\pi[1+\rho C+\rho\, \mathfrak{H}(D)]\, S(Q) - 2\pi\rho\, \bar{S}(Q) \pmod{\rho^2}. \end{cases}$$

Passons au second membre de (1). La formule fondamentale de Kronecker [§ 29 (4)] donne

$$\rho |D|^{\frac{1+\rho}{2}} \sum_{m,n} (am^2+bmn+cn^2)^{-1-\rho}$$
$$\equiv 2\pi[1+2\rho C+2\rho \log 2\pi - \rho \log \Lambda'(0, 0, \omega_1, \omega_2)] \pmod{\rho^2},$$

d'où, en observant les relations

$$D_0 Q^2_\alpha = b^2_\alpha - 4 a_\alpha c_\alpha, \qquad D = D_0 Q^2_\alpha Q'^2_\alpha,$$

$$\rho |D|^{\frac{1+\rho}{2}} Q'^{-1-\rho}_\alpha \sum_{m,n} (a_\alpha m^2 + b_\alpha mn + c_\alpha n^2)^{-1-\rho}$$
$$\equiv 2\pi[1+2\rho C+2\rho \log 2\pi - \rho \log \Lambda'(0, 0, \omega_1^{(\alpha)}, \omega_2^{(\alpha)})] \pmod{\rho^2},$$

où $\omega^{(\alpha)}$, $-\omega_2^{(\alpha)}$ sont les deux racines de $a_\alpha + b_\alpha \omega_k + c_\alpha \omega_k^2 = 0$.

Donc

$$\rho\,|\,D\,|^{\frac{1+\rho}{2}}\sum_{\alpha}\varepsilon_{Q'_\alpha}\frac{Q'^{-2-2\rho}_\alpha}{K(D_0Q^2_\alpha)}\sum_{a_\alpha,b_\alpha,c_\alpha}\sum_{m,n}(a_\alpha m^2+b_\alpha mn+c_\alpha n^2)^{-1-\rho}$$

$$=2\pi\sum_{\alpha}\varepsilon_{Q'_\alpha}\frac{Q'^{-1-\rho}_\alpha}{K(D_0Q^2_\alpha)}\sum_{a_\alpha,b_\alpha,c_\alpha}[1+2\rho C+2\rho\log 2\pi-\rho\log\Lambda'(0,0,\omega_1^{(\alpha)},\omega_2^{(\alpha)})]$$

$$=2\pi(1+2\rho C+2\rho\log 2\pi)\sum_{\alpha}\varepsilon_{Q'_\alpha}Q'^{-1-\rho}_\alpha$$

$$-2\pi\rho\sum_{\alpha}\varepsilon_{Q'_\alpha}\frac{Q'^{-1-\rho}_\alpha}{K(D_0Q^2_\alpha)}\sum_{a_\alpha,b_\alpha,c_\alpha}\log\Lambda'(0,0,\omega_1^{(\alpha)},\omega_2^{(\alpha)})\pmod{\rho^2},$$

puisque $K(D_0Q^2_\alpha)$ est le nombre des classes $(a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha)$. Si l'on remplace

$$Q'^{-1-\rho}_\alpha \quad\text{par}\quad Q'^{-1}_\alpha-\rho Q'^{-1}_\alpha\log Q'_\alpha,$$

on pourra écrire

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}&\rho\,|\,D\,|^{\frac{1+\rho}{2}}\sum_{\alpha}\varepsilon_{Q'_\alpha}\frac{Q'^{-2-2\rho}_\alpha}{K(D_0Q^2_\alpha)}\sum_{a_\alpha,b_\alpha,c_\alpha}(a_\alpha m^2+b_\alpha mn+c_\alpha n^2)^{-1-\rho}\\&\quad=2\pi(1+2\rho C+2\rho\log 2\pi)S(Q)-2\pi\rho\,\overline{S}(Q)\\&\qquad-2\pi\rho\sum_{\alpha}\varepsilon_{Q'_\alpha}\frac{1}{Q'_\alpha K(D_0Q^2_\alpha)}\sum_{a_\alpha,b_\alpha,c_\alpha}\log\Lambda'(0,0,\omega_1^{(\alpha)},\omega_2^{(\alpha)})\pmod{\rho^2}.\end{aligned}\right.$$

La comparaison de (1), (4), (5) donne alors

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned}&\mathfrak{H}(D)\\&\quad=C+\log 4\pi^2-\frac{1}{S(Q)}\sum_{\alpha}\varepsilon_{Q'_\alpha}\frac{1}{Q'_\alpha K(D_0Q^2_\alpha)}\sum_{a_\alpha,b_\alpha,c_\alpha}\log\Lambda'(0,0,\omega_1^{(\alpha)},\omega_2^{(\alpha)}).\end{aligned}\right.$$

En se reportant au § 16, on voit que

$$S(Q)=\sum_{\alpha}\varepsilon_{Q'_\alpha}Q'^{-1}_\alpha=\prod_{q}\left(1-\frac{1}{q}\right),$$

q parcourant tous les facteurs premiers distincts de Q, ou

$$S(Q)=\frac{\varphi(Q)}{Q}=\frac{\varphi(Q)}{Q_\alpha Q'_\alpha},\qquad\frac{1}{S(Q)Q'_\alpha}=\frac{Q_\alpha}{\varphi(Q)}.$$

Donc (6) devient

$$(7)\quad \mathfrak{H}(D) = C - \frac{1}{\varphi(Q)} \sum_{\alpha} \varepsilon_{Q'_\alpha} \frac{Q_\alpha}{K(D_0 Q_\alpha^2)} \sum_{a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha} \log \frac{1}{4\pi^2} \Lambda'(o, o, \omega_1^{(\alpha)}, \omega_2^{(\alpha)}).$$

Désignons par $\log M(\sqrt{D}, Q'_\alpha)$ la valeur moyenne de l'invariant

$$\log \frac{4\pi^2}{\Lambda'(o, o, \omega_1^{(\alpha)}, \omega_2^{(\alpha)})} = \log \frac{c_\alpha}{\sqrt{-D_0 Q_\alpha^2}\, \eta^2(\omega_1^{(\alpha)}) \eta^2(\omega_2^{(\alpha)})} \quad [\S 28, (26)],$$

pour toutes les classes $(a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha)$ ou, ce qui revient au même, pour toutes les classes de déterminant D et d'ordre Q'_α, en sorte que $M(\sqrt{D}, Q'_\alpha)$ désignera la moyenne *géométrique* de l'invariant

$$\frac{4\pi^2}{\Lambda'(o, o, \omega_1^{(\alpha)}, \omega_2^{(\alpha)})} = \frac{c_\alpha}{\sqrt{-D_0 Q_\alpha^2}\, \eta^2(\omega_1^{(\alpha)}) \eta^2(\omega_2^{(\alpha)})},$$

pour l'ordre Q'_α, c'est-à-dire pour toutes les classes de cet ordre qui seront désormais représentées par (a, b, c) et leurs racines par ω_1, $-\omega_2$; on pourra écrire (7)

$$(8)\qquad \mathfrak{H}(D) = C + \frac{Q}{\varphi(Q)} \sum_t \frac{\varepsilon_t}{t} \log M(\sqrt{D}, t) \qquad (D = D_0 Q^2),$$

t parcourant tous les diviseurs de Q.

Comme les arguments $\omega_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2c}$, $-\omega_2 = \frac{b+\sqrt{D}}{2c}$, de Λ' ne dépendent que des rapports $b : c : \sqrt{D}$, la valeur moyenne $M(\sqrt{D}, Q'_\alpha)$ reste inaltérée quand on enlève un facteur commun aux deux arguments. Donc, D_0 étant un discriminant fondamental et P, Q, R des entiers quelconques, on a

$$M(\sqrt{D_0 P^2 Q^2 R^2},\ PQ) = M(\sqrt{D_0 Q^2 R^2}, Q).$$

Si donc on remplace dans (8) $M(\sqrt{D}, t)$ par $M\left(\frac{\sqrt{D}}{t}, 1\right)$, on pourra écrire

$$\varphi(Q)[\mathfrak{H}(D_0 Q^2) - C] = \sum_{d,t} \varepsilon_t\, d \log M(\sqrt{D_0 d^2}, 1) \qquad (dt = Q).$$

d'où l'on déduit, d'après les formules (4), (5) du § 16,

$$Q \log M(\sqrt{D_0 Q^2}, 1) = \sum_d \varphi(d)[\mathfrak{H}(D_0 d^2) - C],$$

d parcourant tous les diviseurs de Q, et, puisque $\sum_d \varphi(d) = Q$ (§ 16)

$$(9) \qquad C + \log M(\sqrt{D_0 Q^2}, 1) = \frac{1}{Q} \sum_d \varphi(d)\, \mathfrak{H}(D_0 d^2),$$

formule qui fournit la représentation de la valeur moyenne de l'invariant

$$\frac{4\pi^2}{A'\left(0, 0, \frac{-b+\sqrt{D}}{2c}, \frac{b+\sqrt{D}}{2c}\right)} = \frac{c}{\sqrt{-D}\,\eta^2(\omega_1)\eta^2(\omega_2)} \quad [§ 28 (26)],$$

pour l'ordre *primitif* du discriminant $D_0 Q^2$ par les fonctions $\mathfrak{H}(D_0 d^2)$ relatives aux différents discriminants diviseurs de D de la forme $D_0 d^2$. Or nous allons voir que toutes les fonctions $\mathfrak{H}(D_0 d^2)$ se ramènent à $\mathfrak{H}(D_0)$. Partons de l'identité

$$\sum_1^\infty \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^{1+\rho}} = \prod_p \frac{1}{1 - \left(\frac{D}{p}\right) \frac{1}{p^{1+\rho}}},$$

où p parcourt tous les nombres premiers et où la série du premier membre détermine l'ordre des termes quand on effectue le produit du second membre pour $\rho = 0$; on en déduit

$$\log \sum_1^\infty \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^{1+\rho}} = -\sum_p \log\left[1 - \left(\frac{D}{p}\right) p^{-1-\rho}\right],$$

et, en dérivant,

$$\frac{\overline{H}(D)}{H(D)} = \lim_{\rho=0} \sum_p \left(\frac{D}{p}\right) \frac{\log p}{p^{1+\rho} - \left(\frac{D}{p}\right)} \text{ [1]}.$$

---

[1] Si l'on pouvait démontrer l'égalité des deux expressions

$$\lim_{\rho=0} \sum_p \left(\frac{D}{p}\right) \frac{\log p}{p^{1+\rho} - \left(\frac{D}{p}\right)} \quad \text{et} \quad \sum_p \left(\frac{D}{p}\right) \frac{\log p}{p - \left(\frac{D}{p}\right)},$$

où les nombres premiers p vont toujours en croissant, il en résulterait, d'après un

Ainsi l'on aura

$$(10) \qquad \log\sqrt{-D} - \mathfrak{H}(D) = \frac{\overline{H}(D)}{H(D)} = \lim_{\rho=0} \sum_p \left(\frac{D}{p}\right) \frac{\log p}{p^{1+\rho} - \left(\frac{D}{p}\right)},$$

et (9) pourra s'écrire

$$C + \log M(\sqrt{D_0 Q^2}, 1)$$
$$= \frac{1}{Q} \sum_d \varphi(d) \left[\log\sqrt{-D_0 d^2} - \lim_{\rho=0} \sum_p \left(\frac{D_0}{p}\right)\left(\frac{d^2}{p}\right) \frac{\log p}{p^{1+\rho} - \left(\frac{D_0}{p}\right)\left(\frac{d^2}{p}\right)} \right]$$

ou, puisque les termes où $\left(\frac{d^2}{p}\right) = 0$ disparaissent dans le second membre,

$$C + \log M(\sqrt{D_0 Q^2}, 1)$$
$$= \frac{1}{Q} \sum_d \varphi(d) \left[\log\sqrt{-D_0 d^2} - \lim_{\rho=0} \sum_d \left(\frac{D_0}{p}\right)\left(\frac{d^2}{p}\right) \frac{\log p}{p^{1+\rho} - \left(\frac{D_0}{p}\right)} \right],$$

d parcourant tous les diviseurs de Q.

Or on a

$$\sum_d \varphi(d) = Q,$$
$$\sum_d \left(\frac{d^2}{p}\right) \varphi(d) = \frac{Q}{p^r},$$

si p^r est la plus haute puissance de p contenue dans Q (car le

---

théorème général de Kronecker (*Comptes rendus*, 22 novembre 1886), que

$$\lim_{\substack{m=\infty \\ n=\infty}} \frac{1}{n-m} \sum \left(\frac{D}{p}\right) \frac{p \log p}{p - \left(\frac{D}{p}\right)} = 0, \qquad m < p \leqq n,$$

la sommation s'étendant à tous les nombres premiers p compris entre m et n.

Donc, dans un intervalle assez grand et assez éloigné, où par conséquent $\frac{p}{p - \left(\frac{D}{p}\right)}$ est sensiblement égal à 1, la somme des logarithmes des nombres premiers pour lesquels $\left(\frac{D}{p}\right) = +1$ serait sensiblement égale à celle des logarithmes des nombres premiers pour lesquels $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$ (*Sitzungsberichte*, p. 311; 1889).

premier membre représente $\Sigma\varphi(d)$ étendue à tous les diviseurs d premiers à p, c'est-à-dire à tous les diviseurs de $\frac{Q}{p^r}\Big)$. Donc

$$\begin{aligned}
&C+\log M(\sqrt{D},1)\\
&=\log\sqrt{-D_0}+\frac{1}{Q}\sum_d \varphi(d)\log d-\lim_{\rho=0}\sum_p\left(\frac{D_0}{p}\right)\frac{p^{-r}\log p}{p^{1+\rho}-\left(\frac{D_0}{p}\right)}.
\end{aligned}$$

Transformons l'expression $\sum\limits_d \varphi(d)\log d$. On a, si $d=q_1^{h_1}q_2^{h_2}\ldots$,

$$\begin{aligned}
\sum_d \varphi(d)\log d &= \sum_{h_1,h_2,\ldots}\varphi(q_1^{h_1}q_2^{h_2}\ldots)\log q_1^{h_1}q_2^{h_2}\ldots\\
&=\sum_{h_1,h_2,\ldots}(h_1\log q_1+h_2\log q_2+\ldots)\varphi(q_1^{h_1})\varphi(q_2^{h_2})\ldots,
\end{aligned}$$

la sommation s'étendant à

$$h_\alpha=0,1,2,\ldots,r_\alpha \qquad (\alpha=1,2,\ldots),$$

et r_α étant la plus haute puissance de q_α contenue dans Q. Dans cette somme le coefficient de $\log q_1$ est

$$\sum_{h_1}h_1\varphi(q_1^{h_1})\sum_{h_2,h_3,\ldots}\varphi(q_2^{h_2}q_3^{h_3}\ldots)=\frac{Q}{q_1^{r_1}}\sum_{h_1}h_1\varphi(q_1^{h_1}).$$

Or on a

$$\begin{aligned}
\sum_{h_1}h_1\varphi(q_1^{h_1}) &= \varphi(q_1)+2\varphi(q_1^2)+3\varphi(q_1^3)+\ldots+r_1\varphi(q_1^{r_1})\\
&=q_1-1+2q_1(q_1-1)+3q_1^2(q_1-1)+\ldots+r_1q_1^{r_1-1}(q_1-1)\\
&=(q_1-1)(1+2q_1+3q_1^2+\ldots+r_1q_1^{r_1-1})\\
&=(q_1-1)\frac{d}{dq_1}(q_1+q_1^2+\ldots+q_1^{r_1})\\
&=(q_1-1)\frac{d}{dq_1}\left(q_1\frac{q_1^{r_1}-1}{q_1-1}\right)\\
&=r_1q_1^{r_1}-\frac{q_1^{r_1}-1}{q_1-1}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{Q}{q_1^{r_1}}\sum_{h_1}h_1\varphi(q_1^{h_1})=r_1Q-\frac{1-q_1^{-r_1}}{q_1-1}Q.$$

et

$$\frac{1}{Q}\sum_d \varphi(d)\log d = \sum_\alpha r_\alpha \log q_\alpha - \sum_\alpha \frac{1-q_\alpha^{-r_\alpha}}{q_\alpha - 1}\log q_\alpha$$
$$= \log Q - \sum_q \frac{1-q^{-r}}{q-1}\log q,$$

la sommation s'étendant à tous les facteurs premiers distincts q de Q, et q^r étant la plus haute puissance de q qui divise Q. Par suite,

$$C + \log M(\sqrt{D}, 1)$$
$$= \log\sqrt{-D} - \sum_q \frac{1-q^{-r}}{q-1}\log q - \lim_{\rho=0}\sum_p \left(\frac{D_0}{p}\right)\frac{p^{-r}\log p}{p^{1+\rho} - \left(\frac{D}{p}\right)}.$$

Dans la dernière somme, qui s'étend à tous les nombres premiers, r est nul dès que p n'est pas contenu dans Q. On peut donc écrire

$$C + \log M(\sqrt{D}, 1)$$
$$= \log\sqrt{-D} - \sum_q \frac{1-q^{-r}}{q-1}\log q$$
$$- \sum_q \left(\frac{D_0}{q}\right)\frac{(q^{-r}-1)\log q}{q - \left(\frac{D_0}{q}\right)} - \lim_{\rho=0}\sum_p \left(\frac{D_0}{p}\right)\frac{\log p}{p^{1+\rho} - \left(\frac{D_0}{p}\right)},$$

p parcourant encore *tous* les nombres premiers, ou, en posant

$$(11)\qquad \sum_q \left[1 - \left(\frac{D_0}{q}\right)\right]\frac{q^r - 1}{q^r - q^{r-1}}\,\frac{\log q}{q - \left(\frac{D_0}{q}\right)} = Z(D_0, Q),$$

$$C + \log\frac{M(\sqrt{D}, 1)}{\sqrt{-D}} + Z(D_0, Q) = -\lim_{\rho=0}\sum_d \left(\frac{D_0}{p}\right)\frac{\log p}{p^{1+\rho} - \left(\frac{D_0}{p}\right)},$$

ou, d'après (10),

$$(12)\qquad C + \log M(\sqrt{D_0 Q^2}, 1) + Z(D_0, Q) = \mathfrak{Z}(D_0) + \log Q,$$

formule qui représente $\log M(\sqrt{D_0 Q^2}, 1)$ par $\mathfrak{Z}(D_0)$ seulement [voir (9)].

Pour le cas $D = D_0$, $Q = 1$ on a $Z(D_0, Q) = Z(D_0, 1) = 0$, et (12) devient

$$C + \log M(\sqrt{D_0}, 1) = \mathfrak{J}(D_0).$$

En remplaçant $\mathfrak{J}(D_0)$ par cette valeur dans (12), on obtient

$$\log \frac{M(\sqrt{D}, 1)}{\sqrt{-D}} + Z(D_0, Q) = \log \frac{M(\sqrt{D_0}, 1)}{\sqrt{-D_0}}, \tag{13}$$

formule par laquelle la valeur moyenne de l'invariant

$$\frac{4\pi^2}{\Lambda'\left(0,\ 0,\ \frac{-b+\sqrt{D}}{2c},\ \frac{b+\sqrt{D}}{2c}\right)}$$

pour l'ordre primitif est ramenée à la valeur moyenne correspondante pour le discriminant fondamental. On voit en même temps que *l'expression*

$$\log \frac{M(\sqrt{D_0 Q^2}, 1)}{\sqrt{-D_0 Q^2}} + Z(D_0, Q)$$

est indépendante de Q.

On peut aussi se servir de (13) pour comparer les valeurs de M correspondant aux divers *ordres* du même discriminant. Soit, en effet, $Q = dt = d_1 t_1$; on aura, d'après une remarque déjà faite,

$$M(\sqrt{D}, t) = M(\sqrt{D_0 d^2}, 1), \qquad M(\sqrt{D}, t_1) = M(\sqrt{D_0 d_1^2}, 1),$$

et d'après (13)

$$\log \frac{M(\sqrt{D}, t)}{\sqrt{-D_0 d^2}} + Z(D_0, d) = \log \frac{M(\sqrt{D}, t_1)}{\sqrt{-D_0 d_1^2}} + Z(D_0, d_1)$$

ou, en retranchant aux deux membres $\log\sqrt{-D}$,

$$\left\{\begin{aligned} &\log t M(\sqrt{D}, t) + Z\left(D_0, \frac{1}{t}\sqrt{\frac{D}{D_0}}\right) \\ &\quad = \log t_1 M(\sqrt{D}, t_1) + Z\left(D_0, \frac{1}{t_1}\sqrt{\frac{D}{D_0}}\right). \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Ainsi l'expression

$$\log t\,\mathrm{M}(\sqrt{\mathrm{D}}, t) + \mathrm{Z}\left(\mathrm{D}_0, \frac{1}{t}\sqrt{\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}_0}}\right)$$

a une valeur indépendante de t (diviseur de Q), c'est-à-dire indépendante de *l'ordre* choisi pour le discriminant D.

Si l'on se rappelle les définitions

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &-\log\frac{\mathrm{A}'(0, 0, \omega_1, \omega_2)}{4\pi^2}\\ &\quad = \frac{\pi\sqrt{-\mathrm{D}}}{6c} - \log\frac{\sqrt{-\mathrm{D}}}{c}\\ &\quad\quad - 2\log\prod_1^{\infty}(1 - e^{2n\omega_1\pi i})(1 - e^{2n\omega_2\pi i}) \qquad [\S\,28, (27)], \end{aligned}\right.$$

$$\log\mathrm{M}(\sqrt{\mathrm{D}}, t) = \frac{-1}{\mathrm{K}\left(\frac{\mathrm{D}}{t^2}\right)}\sum_{a, b, c}\log\frac{\mathrm{A}'(0, 0, \omega_1, \omega_2)}{4\pi^2},$$

$$\omega_1 = \frac{-b + \sqrt{\mathrm{D}}}{2c}, \qquad \omega_2 = \frac{b + \sqrt{\mathrm{D}}}{2c},$$

on pourra énoncer ainsi le résultat (14) :

Si (a, b, c) parcourt un système de représentants de l'ordre t pour le discriminant D, *l'expression*

$$\frac{1}{\mathrm{K}\left(\frac{\mathrm{D}}{t^2}\right)}\sum_{a, b, c}\left\{\frac{\pi\sqrt{-\mathrm{D}}}{6c} - \log\frac{\sqrt{-\mathrm{D}}}{ct} - 4\log\prod_1^{\infty}|1 - e^{2n\omega\pi i}|\right\}$$
$$+\sum_{q, r}\left[1 - \left(\frac{\mathrm{D}_0}{q}\right)\right]\frac{q^r - 1}{q^r - q^{r-1}}\,\frac{\log q}{q - \left(\frac{\mathrm{D}_0}{q}\right)},$$

où ω est la racine de $a + b\omega + c\omega^2 = 0$, dont la partie imaginaire est positive, et où q parcourt les facteurs premiers distincts de $\sqrt{\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}_0 t^2}} = q_1^{r_1} q_2^{r_2}\ldots$, *a la même valeur pour tous les ordres* (¹).

(¹) On a déjà trouvé au § 13 une fonction jouissant de cette propriété.

La formule (12) peut encore s'écrire

$$K(D)[C - \mathfrak{H}(D_0) + Z(D_0, Q)] = \sum_{a,b,c} \log \frac{\eta^2(\omega_1)\eta^2(\omega_2)}{c} \sqrt{-D},$$

$$K(D)\left[C - \log\sqrt{-D} + \frac{\overline{H}(D_0)}{H(D_0)} - \log\sqrt{-D_0} - Z(D_0, Q)\right]$$

$$= \sum_{a,b,c} \log \frac{\eta^2(\omega_1)\eta^2(\omega_2)}{c}$$

$$\left(\omega_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2c}, \quad \omega_2 = \frac{b+\sqrt{D}}{2c}\right),$$

ou, en échangeant a et c,

$$(16) \begin{cases} \displaystyle\sum_{a,b,c} \log \frac{\eta^2(\omega_1)\eta^2(\omega_2)}{a} = CK(D) - K(D)\log D_0 Q \\ \qquad\qquad + \tau \dfrac{H(D_0)}{2\pi} \dfrac{K(D)}{K(D_0)} \sqrt{-D_0} - K(D)Z(D_0, Q) \\ \qquad \left(\omega_1 = \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \quad \omega_2 = \dfrac{b+\sqrt{D}}{2a}\right). \end{cases}$$

§ 33. Conséquences et applications.

D'après la formule (15) du paragraphe précédent et la définition de $\log M(\sqrt{D}, 1)$, on a

$$\log M(\sqrt{D}, 1) = \frac{1}{K(D)} \sum_{a,b,c} \left(\frac{\pi\sqrt{-D}}{6c} - \log \frac{\sqrt{-D}}{c}\right)$$

$$- \frac{2}{K(D)} \sum_{a,b,c} \sum_{1}^{\infty} \log(1 - e^{2n\omega_1\pi i})(1 - e^{2n\omega_2\pi i}).$$

Or

$$\log(1-e^{2n\omega_1\pi i})(1-e^{2n\omega_2\pi i})$$

$$= \log\left(1 - e^{-\frac{n\pi}{c}\sqrt{-D}} e^{\frac{n\pi i b}{c}}\right)\left(1 - e^{-\frac{n\pi}{c}\sqrt{-D}} e^{-\frac{n\pi i b}{c}}\right)$$

$$= -2\left(e^{-\frac{n\pi}{c}\sqrt{-D}} \cos\frac{n\pi b}{c}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} e^{-\frac{2n\pi}{c}\sqrt{-D}} \cos\frac{2n\pi b}{c} + \ldots + \frac{1}{m} e^{-\frac{mn\pi}{c}\sqrt{-D}} \cos\frac{mn\pi b}{c} + \ldots\right)$$

et

$$\sum_1^\infty \log(1-e^{2n\omega_1\pi i})(1-e^{2n\omega_2\omega i}) = -2\sum_{m,n}\frac{1}{m}e^{-\frac{mn\pi}{c}\sqrt{-D}}\cos\frac{mn\pi b}{c} \text{ (1)}$$

$$(m, n = 1, 2, 3, \ldots, \infty)$$

$$= -2\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k}S_d(k)e^{-\frac{k\pi}{c}\sqrt{-D}}\cos\frac{k\pi b}{c},$$

$S_d(k)$ désignant la somme des diviseurs de k, car le terme général de la série double précédente se présentera pour chaque valeur de $mn=k$ autant de fois que k a de diviseurs n et chaque fois avec le facteur $\frac{1}{m}=\frac{n}{k}$.

Donc

$$(1)\quad \begin{cases} K(D)\log M(\sqrt{D}, 1) \\ = \sum_{a,b,c}\left[\frac{\pi\sqrt{-D}}{6c} - \log\frac{\sqrt{-D}}{c} + 4\sum_1^\infty \frac{1}{n}S_d(n)e^{-\frac{n\pi\sqrt{-D}}{c}}\cos\frac{n\pi b}{c}\right]. \end{cases}$$

Posons

$$(2)\quad \Phi(D_0Q^2) = \frac{1}{K(D_0Q^2)}\sum_{a,b,c}\left(\frac{\pi\sqrt{-D}}{6c} - \log\frac{-D}{c}\right) + Z(D_0, Q),$$

$$(3)\quad \Psi(D_0Q^2) = \frac{4}{K(D_0Q^2)}\sum_{a,b,c}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}S_d(n)e^{-\frac{n\pi\sqrt{-D}}{c}}\cos\frac{nb\pi}{c}.$$

On aura

$$(4)\quad \Phi(D_0Q^2) + \Psi(D_0Q^2) = \log\frac{M(\sqrt{D}, 1)}{\sqrt{-D}} + Z(D_0, Q)$$

$$= \log\frac{M(\sqrt{D_0}, 1)}{\sqrt{-D_0}} \quad [\S\ 32, (13)],$$

c'est-à-dire

$$\Phi(D_0Q^2)\,\Psi(D_0Q^2) = \Phi(D_0\mathfrak{Q}^2) + \Psi(D_0\mathfrak{Q}^2),$$

Q, $\mathfrak{Q}$ étant deux entiers quelconques. Cette formule fournit une infinité de relations, entre des expressions numériques très différentes par leur forme. Pour mieux étudier le caractère de ces relations, cherchons des valeurs approchées de $\Psi(D_0Q^2)$.

(1) La série double est absolument convergente.

Remarquons d'abord que $S_d(n)$ est $< n^2$, car si la décomposition de n en facteurs premiers est

$$n = p_1^{h_1} p_2^{h_2} p_3^{h_3} \ldots,$$

on a

$$S_d(n) = \prod_i \frac{p_i^{h_i+1} - 1}{p_i - 1},$$

et, d'après l'inégalité

$$p_i^{2h_i} - \frac{p_i^{h_i+1} - 1}{p_i - 1} = \frac{(p_i^{h_i} - 1)(p_i^{h_i+1} - p_i^{h_i} - 1)}{p_i - 1} > 0,$$

$$S_d(n) < \prod_i p_i^{2h_i} \quad \text{ou} \quad S_d(n) < n^2.$$

Donc

$$\left| \sum_{n=k}^{n=\infty} \frac{1}{n} S_d(n)\, e^{-\frac{n\pi\sqrt{-D}}{c}} \cos\frac{nb\pi}{c} \right| < \sum_{n=k}^{n=\infty} n e^{-\frac{n\pi\sqrt{-D}}{c}}.$$

Nous supposerons que l'on prend, comme représentant de chaque classe, une forme réduite, en sorte que l'on aura toujours (§ 6), puisque $|b| \leqq c \leqq a$,

$$4ac - b^2 \geqq 3c^2, \qquad \frac{\sqrt{-D}}{c} \geqq \sqrt{3}, \qquad e^{-\pi\frac{\sqrt{-D}}{c}} < e^{-\pi\sqrt{3}}.$$

Or on a en général, pour $|x| < 1$ [1],

$$\sum_{n=k}^{n=\infty} nx^n = x \sum_{n=k}^{n=\infty} nx^{n-1} = x\,\frac{d}{dx} \sum_{n=k}^{n=\infty} x^n = x\,\frac{d}{dx}\,\frac{x^k}{1-x}$$
$$= kx^k \left[\frac{1}{1-x} + \frac{x}{k(1-x)^2} \right]$$

et, pour $x < e^{-\pi\sqrt{3}} < 0,00433343$, puisque la série est une fonction croissante de x,

$$\sum_{n=k}^{n=\infty} nx^n = \Sigma < kx^k \left[\frac{1}{1 - 0,00433343} + \frac{1}{k}\,\frac{0,00433343}{(1 - 0,00433343)^2} \right]$$
$$< kx^k \left(1,004353 + \frac{1}{k}\, 0,004372 \right).$$

---

(1) Le calcul suivant, qui diffère de celui de Kronecker, paraît donner une approximation plus sûre.

Ainsi :

$$\begin{array}{lll}
k=1, & \Sigma < 1{,}008725\,kx^k & < 1{,}009\,x^k, \\
k=2, & \Sigma < 1{,}006539\,kx^k & < 2{,}014\,x^k, \\
k=3, & \Sigma < 1{,}005811\,kx^k & \\
k=4, & \Sigma < 1{,}005446\,kx^k & < 3{,}018\,x^k, \\
k=5, & \Sigma < 1{,}005228\,kx^k & \\
k \geqq 6, & \Sigma < 1{,}004978\,kx^k & < 1{,}005\,kx^k.
\end{array}$$

Donc :

Pour $k=3$,

$$\Psi(D_0Q^2) = \frac{1}{K(D_0Q^2)} \sum_{a,b,c} \left[4e^{-\frac{\pi\sqrt{-D}}{c}} \cos\frac{b\pi}{c} + 6e^{-\frac{2\pi\sqrt{-D}}{c}} \cos\frac{2b\pi}{c} + \varepsilon.12{,}072\, e^{-\frac{3\pi\sqrt{-D}}{c}} \right];$$

Pour $k=2$,

$$\Psi(D_0Q^2) = \frac{1}{K(D_0Q^2)} \sum_{a,b,c} \left[4e^{-\frac{\pi\sqrt{-D}}{c}} \cos\frac{b\pi}{c} + \varepsilon.8{,}056\, e^{-\frac{2\pi\sqrt{-D}}{c}} \right];$$

Pour $k=1$,

$$\Psi(D_0Q^2) = \frac{\varepsilon.4{,}036}{K(D_0Q^2)} \sum_{a,b,c} e^{-\frac{\pi\sqrt{-D}}{c}}.$$

On en conclut qu'avec une erreur de $\pm \frac{4{,}036}{K(D_0Q^2)}\, k \sum_{a,b,c} e^{-\frac{k\pi\sqrt{-D}}{c}}$ la valeur de $\Phi(D_0Q^2) + \Psi(D_0Q^2)$ est, pour tous les nombres Q, approximativement égale à

$$\Phi(D_0Q^2) + \frac{4}{K(D_0Q^2)} \sum_{n=1}^{n=k-1} \frac{1}{n} S_d(n)\, e^{-\frac{n\pi\sqrt{-D}}{c}} \cos\frac{nb\pi}{c},$$

ou, en d'autres termes, que *tous les intervalles compris entre les deux valeurs*

$$\Phi(D_0Q^2) + \frac{4}{K(D_0Q^2)} \sum_{n=1}^{n=k-1} \frac{1}{n} S_d(n)\, e^{-\frac{n\pi\sqrt{-D}}{c}} \cos\frac{nb\pi}{c} \pm \frac{4{,}036}{K(D_0Q^2)}\, k \sum_{a,b,c} e^{-\frac{k\pi\sqrt{-D}}{c}}$$

ont une partie commune, quel que soit Q.

Donnons quelques exemples. Soit d'abord $D_0 = -3$.

Pour $Q = 1, 2, 3$ il y a une seule forme réduite qui est $(1, 1, 1)$ ou $(3, 0, 1)$ ou $(7, 1, 1)$, et l'on obtient les résultats suivants :

$$Q = 1, \quad \Phi(-3) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \log 3 = -0,19171229\ldots,$$

$$\Psi(-3) = -4e^{-\pi\sqrt{3}} + 6e^{-2\pi\sqrt{3}} = -0,01722105\ldots \quad (k = 3),$$

$$\Phi(-3) + \Psi(-3) = -0,208933\ldots,$$

le dernier chiffre étant incertain ;

$$Q = 2, \quad \Phi(-12) = \frac{\pi\sqrt{12}}{6} - \log 12 + \frac{2\log 2}{3} = -0,20900865\ldots,$$

$$\Psi(-12) = 4e^{-2\pi\sqrt{3}} + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0,000075\ldots,$$

$$\Phi(-12) + \Psi(-12) = -0,208933\ldots;$$

$$Q = 3, \quad \Phi(-27) = \frac{\pi\sqrt{27}}{6} - \log 27 + \frac{\log 3}{3} = -0,208933\ldots,$$

$\Psi(-27)$ est sans influence sur les six premières décimales.

Les valeurs des trois expressions

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \log 3 - 4e^{-\pi\sqrt{3}} + 6e^{-2\pi\sqrt{3}},$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \log 3 - \frac{4}{3}\log 2 + 4e^{-2\pi\sqrt{3}},$$

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{2} - \frac{8}{3}\log 3,$$

très différentes par leur forme, ont donc cinq décimales communes et fournissent par conséquent des équations approchées entre π, $e^{-\pi\sqrt{3}}$, $\log 2$, $\log 3$. Ainsi, en les multipliant par trois coefficients A, B, C qui annulent le coefficient de $\frac{\pi}{3}$ dans la somme des résultats et tels que $A + B + C = 0$, par exemple par $A = \frac{-1}{3}$, $B = -1$, $C = \frac{4}{3}$, on a

$$-x^2 - 2x + \frac{4}{3}\log 2 - \frac{5}{6}\log 3 = \text{approx. } 0 \quad (< 0,0000004)$$

pour $x = e^{-\pi\sqrt{3}}$.

Soit $D_0 = -4$.

Pour $Q = 1$, $D = -4$ il y a une seule forme réduite : $(1, 0, 1)$.
Pour $Q = 5$, $D = -100$ il y a deux formes réduites : $(25, 0, 1)$, $(13, 2, 2)$.
Pour $Q = 13$, $D = -4.13^2$ il y a six formes réduites :

$$(169, 0, 1), (85, 2, 2), (34, \pm 2, 5), (17, \pm 2, 10).$$

On obtient les résultats suivants

$$Q = 1, \qquad \Phi(-4) = \frac{\pi\sqrt{4}}{6} - \log 4 = -0,339097\ldots,$$

$$\Psi(-4) = 4e^{-2\pi} + 6e^{-4\pi} = 0,0074907\ldots,$$

$$\Phi(-4) + \Psi(-4) = -0,331606\ldots;$$

$$Q = 5, \qquad \Phi(-100) = \frac{5\pi}{4} + \frac{1}{2}\log 2 - \log 100 = 0,3316062\,7\ldots,$$

$\Psi(-100)$ est sans influence sur les six premières décimales;

$$Q = 13, \qquad \Phi(-4.13^2)$$

$$= \frac{91}{60}\pi + \frac{2}{3}\log 5 - \frac{3}{2}\log 2 - 2\log 13 = -0,3319120\ldots,$$

$$\Psi(-4.13^2) = \frac{4}{3}e^{2,6\pi}\cos\frac{\pi}{5} + \ldots = 0,000306$$

(les autres termes de $\Psi(-4,13^2)$ sont sans influence sur les six premières décimales);

$$\Phi(-4.13^2) + \Psi(-4.13^2) = -0,331606\ldots.$$

Les valeurs des trois expressions

$$\frac{\pi}{3} - 2\log 2 + 4e^{-2\pi} + 6e^{-4\pi},$$

$$\frac{5\pi}{4} - \frac{3}{2}\log 2 - 2\log 5,$$

$$\frac{91}{60} - \pi\frac{3}{2}\log 2 + \frac{2}{3}\log 5 - 5\log 13 + \frac{4}{13}e^{-2,6\pi}\cos\frac{\pi}{5}$$

ont donc six décimales communes.

Soit enfin $D_0 = -7$.

Pour $Q = 1$, $D = -7$ il y a une forme réduite : $(2, 1, 1)$.
Pour $Q = 2$, $D = -28$ il y a une forme réduite : $(7, 0, 1)$.
Pour $Q = 3$, $D = -63$ il y a quatre formes réduites :

$$(16, 1, 1), (8, \pm 1, 2), (4, 1, 4).$$

Les résultats sont les suivants :

$$Q=1,\qquad \Phi(-\ 7)=\frac{\pi\sqrt{7}}{6}-\log 7 = \quad 0,560598\ldots,$$

$$\Psi(-\ 7)=-4e^{-\pi\sqrt{7}}+\ldots=-\ 0,000982\ldots,$$

$$\Phi(-7)+\Psi(-7)=0,561580\ldots;$$

$$Q=2,\qquad \Phi(-28)=\frac{\pi\sqrt{7}}{3}-\log 28=0,561580\ldots,$$

$\Psi(-28)$ est sans influence sur les six premières décimales;

$$Q=3,\qquad \Phi(-63)=\frac{9\sqrt{7}}{32}\pi+\log 2-\frac{3}{2}\log 3-\log 7=-0,5629679\ldots,$$

$$\Psi(-63)=e^{-\frac{3\pi\sqrt{7}}{4}}\cos\frac{\pi}{4}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots= \quad 0,0013871\ldots,$$

$$\Phi(-63)+\Psi(-63)=0,5615807\ldots.$$

Les valeurs des trois expressions

$$\frac{\pi\sqrt{7}}{6}-\log 7-4e^{-\pi\sqrt{7}},$$

$$\frac{\pi\sqrt{7}}{3}-\log 7-\log 4,$$

$$\frac{9\pi\sqrt{7}}{32}-\log 7+\log 2-3\log\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3\pi\sqrt{7}}{4}}$$

ont donc six décimales communes, et l'égalité approximative des deux premières montre que l'équation

$$\frac{x}{24}+e^{-x}=\log\sqrt{2}$$

a une racine très voisine de $\pi\sqrt{7}$.

Revenons à l'égalité *rigoureuse*

$$\Phi(-7)+\Psi(-7)=\Phi(-28)+\Psi(-28).$$

On a déjà calculé

$$\Phi(-7)=\frac{x}{6}-\log 7,\qquad \Phi(-28)=\frac{x}{3}-\log 28\qquad (x=\pi\sqrt{7}).$$

On a ensuite

$$\begin{aligned}\Psi(-7) &= -2\log\prod_1^\infty\left(1-e^{n\pi i(i\sqrt{7}+1)}\right)\left(1-e^{n\pi i(i\sqrt{7}-1)}\right)\\ &= -4\log\prod_p(1-e^{-2px})(1+e^{-(2p+1)x}),\\ \Psi(-28) &= -2\log\prod\left(1-e^{n\pi i.i\sqrt{28}}\right)^2\\ &= -4\log\prod_p(1-e^{-2px}),\end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\begin{gathered}\frac{x}{6}-\log 7-4\log\prod_p(1-e^{-2px})(1+e^{-(2p+1)x})\\ =\frac{x}{3}-\log 28-4\log\prod_p(1-e^{-2px}),\\ \frac{x}{24}+\log\prod_1^\infty[1+e^{-(2p+1)x}]=\log\sqrt{2},\\ e^{\frac{x}{24}}\prod_1^\infty[1+e^{-(2p+1)x}]=\sqrt{2},\end{gathered}$$

ou, d'après les notations du § 30,

$$f(\sqrt{-7})=\sqrt{2},$$

et comme

$$f(\omega)=\frac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt[12]{\varkappa\varkappa'}},$$

$$\varkappa\varkappa'=\frac{1}{16},$$

$$\varkappa=\frac{3+\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}\qquad\left(\omega=\frac{iK'}{K}=\sqrt{-7}\right).$$

Une application plus intéressante est la sommation, par des expressions elliptiques très convergentes, de la fonction

$$\mathfrak{H}(D)=-\frac{\overline{H}(D)}{H(D)}+\log\sqrt{-D},$$

$$H(D)=\sum_1^\infty\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n}=\frac{2\pi}{\tau}\frac{K(D)}{\sqrt{-D}},\qquad \overline{H}(D)=\sum_1^\infty\left(\frac{D}{n}\right)\frac{\log n}{n},$$

et, par conséquent, de la série peu convergente $\overline{H}(D)$. On peut se

borner à calculer $\mathfrak{H}(D_0)$, puisque l'on a (§ 16)

$$-\overline{H}(D) = \prod_q^Q \left[1 - \left(\frac{D_0}{q}\right)\frac{1}{q}\right]\left[\sum_q^Q \left(\frac{D_0}{q}\right)\frac{\log q}{q - \left(\frac{D_0}{q}\right)} - \overline{H}(D_0)\right]$$

(q parcourant les facteurs premiers différents de Q);

donc

$$\mathfrak{H}(D) = \frac{1}{H(D_0)}\sum_q^Q \left(\frac{D_0}{q}\right)\frac{\log q}{q - \left(\frac{D_0}{q}\right)} + \mathfrak{H}(D_0) + \log Q \quad (^1).$$

Or, pour calculer $\mathfrak{H}(D_0)$, on a (§ 32)

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{H}(D_0) &= C + \log M(\sqrt{D_0, 1}) \\ &= C + \frac{1}{K(D_0)}\sum_{a,b,c}\left[\frac{\pi\sqrt{-D_0}}{6c} - \log\frac{\sqrt{-D_0}}{c}\right] \\ &\quad - 2\sum_{a,b,c}\log\prod_1^\infty (1 - e^{2n\omega_1\pi i})(1 - e^{2n\omega_2\pi i}) \\ &= C + \Phi(D_0) + \Psi(D_0) + \log\sqrt{-D_0} \\ &= C + \frac{1}{K(D_0)}\sum_{a,b,c}\left(\frac{\pi\sqrt{-D_0}}{c} - \log\frac{\sqrt{-D_0}}{c}\right) \\ &\quad + \frac{4}{K(D_0)}\sum_{a,b,c}\sum_{n=1}^{n=k-1}\frac{1}{n}S_d(n)e^{-\frac{n\pi\sqrt{-D_0}}{c}}\cos\frac{nb\pi}{c} \\ &\quad + \varepsilon\frac{4{,}036}{K(D_0)}k\sum_{a,b,c}e^{-\frac{\pi\sqrt{-D_0}}{c}} \quad (^2) \\ &\qquad (\varepsilon^2 < 1). \end{aligned}\right.$$

(1) Les formules (9), (12) du § 32 donnent

$$\mathfrak{H}(D_0) = \frac{1}{Q}\sum_d \varphi(d)\,\mathfrak{H}(D_0 d^2) + Z(D_0, Q)$$

(d parcourant tous les diviseurs de Q).

Donc

$$\mathfrak{H}(D_0 Q^2) = -\frac{\tau}{2\pi}\frac{\sqrt{-D_0}}{K(D_0)}\sum_q^Q\left(\frac{D_0}{q}\right)\frac{\log q}{q - \left(\frac{D_0}{q}\right)} + Z(D_0, Q) + \frac{1}{Q}\sum_p \varphi(d)\,\mathfrak{H}(D_0 d^2) + \log Q$$

(q parcourant les facteurs premiers distincts de Q).

(2) Dans un premier calcul assez différent, Kronecker trouve 4 au lieu de 4,036 (*Sitzungsberichte*, p. 214, 1889). La cause de cette divergence est une erreur légère que lui-même relève quelques jours après (p. 271).

On obtient d'abord, quel que soit D_0, une limite inférieure de $\mathfrak{H}(D_0)$ et, par conséquent, une limite inférieure de $\overline{H}(D_0)$, en prenant $k=1$ et en choisissant toujours, pour représenter les classes, des formes réduites, ce qui donne

$$4,036\,e^{-\frac{\pi\sqrt{-D_0}}{c}} \leqq 4,036\,e^{-\pi\sqrt{3}} < 0,0175.$$

On a ainsi

$$\mathfrak{H}(D_0) = C + \frac{1}{K(D_0)} \sum_{a,b,c} \left(\frac{\pi\sqrt{-D_0}}{6c} - \log\frac{\sqrt{-D_0}}{c} \right) + \varepsilon.0,0175.$$

Le minimum de $\frac{\pi x}{6} - \log x$ a lieu pour $x = \frac{6}{\pi}$ et est $> 0,35297$; on aura donc, pour chaque terme figurant sous $\sum\limits_{a,b,c}$,

$$\frac{\pi\sqrt{-D_0}}{6c} - \log\frac{\sqrt{-D_0}}{c} > 0,35297,$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{K(D_0)} \sum_{a,b,c} \left(\frac{\pi\sqrt{-D_0}}{6c} - \log\frac{\sqrt{-D_0}}{c} \right) > 0,35297,$$

$$\mathfrak{H}(D_0) > C + 0,35297 + \varepsilon 0,0175,$$

$$> 0,577215 + 0,35297 - 0,0175,$$

$$\mathfrak{H}(D_0) > 0,912685 > \frac{9}{10}.$$

La définition de $\mathfrak{H}(D_0)$ donne ensuite

$$(6) \qquad -\overline{H}(D_0) = H(D_0)[\mathfrak{H}(D_0) - \log\sqrt{-D_0}\,],$$

donc

$$\overline{H}(D_0) < \frac{2\pi}{\tau} \frac{K(D_0)}{\sqrt{-D_0}} \left(\log\sqrt{-D_0} - \frac{9}{10} \right).$$

On peut écrire (6) sous la forme

$$\sqrt{-D_0}\,H(D_0)\,\mathfrak{H}(D_0) = \sum_1^\infty \left(\frac{D_0}{n} \right) \frac{\sqrt{-D_0}}{n} \log\frac{\sqrt{-D_0}}{n}$$

ou

$$\frac{2\pi}{\tau} K(D_0) \mathfrak{Z}(D_0) = \sum_1^{\infty} \left(\frac{D_0}{n}\right) \frac{\sqrt{-D_0}}{n} \log \frac{\sqrt{-D_0}}{n};$$

la précédente inégalité s'écrit alors

$$\frac{\tau}{2\pi} \sum_1^{\infty} \left(\frac{D_0}{n}\right) \frac{\sqrt{-D_0}}{n} \log \frac{\sqrt{-D_0}}{n} > \frac{9}{10} K(D_0).$$

Le premier membre est le second coefficient du développement de

$$\frac{\tau}{2\pi} \sum_1^{\infty} \left(\frac{D_0}{n}\right) \left(\frac{\sqrt{-D_0}}{n}\right)^{1+\rho},$$

suivant les puissances de ρ. Le premier coefficient est

$$(6) \qquad \frac{\tau}{2\pi} \sum_1^{\infty} \left(\frac{D_0}{n}\right) \frac{\sqrt{-D_0}}{n} = K(D_0) \geqq 1.$$

Ainsi les deux premiers coefficients sont positifs et le second est supérieur à 0,912685. Ce résultat complète les recherches de Dirichlet qui avait seulement trouvé la relation (6).

La première équation de ce paragraphe pouvant s'écrire

$$K(D_0) + \rho K(D_0) \mathfrak{Z}(D_0) = \rho \sum_{a,b,c} \log \frac{4\pi^2 e^{\frac{1}{\rho}+C}}{\mathrm{A}'(0, 0, \omega_1, \omega_2)},$$

on voit aussi que les deux premiers coefficients du développement de

$$\frac{\tau}{2\pi} \sum_1^{\infty} \left(\frac{D_0}{n}\right) \left(\frac{\sqrt{-D_0}}{n}\right)^{1+\rho},$$

suivant les puissances de ρ, coïncident avec ceux du développement de

$$\rho \sum_{a,b,c} \log \frac{4\pi^2 e^{\frac{1}{\rho}+C}}{\mathrm{A}'(0, 0, \omega_1, \omega_2)}.$$

C'est ce que montrait déjà la formule (5) du paragraphe précédent.

Passons au calcul de $\bar{\bar{H}}(D_0)$. La formule (6) donne

$$K(D_0)\mathfrak{H}(D_0) = -\frac{\tau\sqrt{-D_0}}{2\pi}\sum_1^\infty\left(\frac{D_0}{n}\right)\frac{\log n}{n} + K(D_0)\log\sqrt{-D_0}.$$

Donc, en prenant seulement $k = 1$, dans (5),

$$\frac{-\tau\sqrt{-D_0}}{2\pi}\sum_1^\infty\left(\frac{D_0}{n}\right)\frac{\log n}{n}$$

$$= \sum_{a,b,c}\left(\frac{\pi\sqrt{-D_0}}{6c} - \log\frac{-D_0}{c}\right) + C\,K(D_0) + \varepsilon.4{,}036\sum\sum_{a,b,c} e^{-\frac{\pi\sqrt{-D_0}}{c}}.$$

Pour les cinq premiers discriminants fondamentaux

$$-D_0 = 3, 4, 7, 8, 11,$$

il n'y a qu'une forme réduite

$$(1, 1, 1),\quad (1, 0, 1),\quad (2, 1, 1),\quad (2, 0, 1),\quad (3, 1, 1),$$

et pour toutes ces formes $c = 1$. Les valeurs de

$$\frac{\pi\sqrt{-D_0}}{6c} - \log\frac{\sqrt{-D_0}}{c},\quad \log\sqrt{-D_0},\quad 4e^{-\frac{\pi\sqrt{-D_0}}{c}}$$

sont

Pour $-D_0 = 3$	0,357594...,	0,549306...,	0,0175...,
» $-D_0 = 4$	0,354050...,	0,693147...,	0,075...,
» $-D_0 = 7$	0,412357...,	0,972955...,	0,00099116...
» $-D_0 = 8$	0,441240...,	1,03972077...,	0,00055934...,
» $-D_0 = 11$	0,537632...,	1,1989476...,	0,00011945.. ,

et, par conséquent, la valeur de $\frac{\pi\sqrt{-D_0}}{6c} - \log\frac{-D_0}{c} + C$ est

Pour $-D_0 = 3$...........	0,385503...,
» $-D_0 = 4$...........	0,238118...,
» $-D_0 = 7$...........	0,016617...,
» $-D_0 = 8$...........	$-0{,}021266$...,
» $-D_0 = 11$...........	$-0{,}083629$....

Donc

$$\frac{3\sqrt{3}}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-3}{n}\right)\frac{\log n}{n} = -0,385503 + \varepsilon.0,0175,$$

$$\frac{4}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-1}{n}\right)\frac{\log n}{n} = -0,238118 + \varepsilon.0,075,$$

$$\frac{\sqrt{7}}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-7}{n}\right)\frac{\log n}{n} = -0,016617 + \varepsilon.0,001,$$

$$\frac{\sqrt{8}}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-2}{n}\right)\frac{\log n}{n} = 0,021266 + \varepsilon.0,00056,$$

$$\frac{\sqrt{11}}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-11}{n}\right)\frac{\log n}{n} = 0,083629 + \varepsilon.0,00012,$$

$$-1 \leqq \varepsilon \leqq +1.$$

Pour $-D_0 = 31$ il y a trois formes réduites

$$(8, 1, 1), \quad (4, 1, 2), \quad (4, -1, 2),$$

et c prend, par conséquent, les valeurs 1, 2, 2. La valeur moyenne de

$$\frac{\pi\sqrt{-D_0}}{6c} - \log\frac{\sqrt{-D_0}}{c}$$

est 0,688620... et $\log\sqrt{31} = 1,7169936\ldots$. On trouve

$$\frac{\sqrt{31}}{3\pi}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-31}{n}\right)\frac{\log n}{n} = 0,4511586 + \varepsilon.0,00044,$$

$$-1 \leqq \varepsilon \leqq +1.$$

On obtiendrait facilement des valeurs plus approchées.

TROISIÈME PARTIE.

APPLICATION COMBINÉE DES DEUX FORMULES DE KRONECKER.

CHAPITRE X.

NORMES PARTIELLES ET TOTALES. ÉQUATION DE PELL.

§ 34. Application préliminaire de la seconde formule fondamentale [1].

Convenons, une fois pour toutes, d'appeler *racine* d'une forme positive (a, b, c) la quantité bien déterminée

$$\omega = \frac{-b + (\sqrt{D})}{2a},$$

où la partie imaginaire est positive, en sorte que

$$\omega' = \frac{b + (\sqrt{D})}{a}$$

est racine de la forme opposée (a, b, c). Je dirai quelquefois que ω' est la racine opposée à ω.

Si deux formes sont équivalentes, leurs racines se déduisent l'une de l'autre par une substitution linéaire (§ 8, note). Nous dirons que ces racines sont *équivalentes*.

Si ω est racine d'une forme du type $(a, 0, c)$, $f(\omega)$, $f_1(\omega)$, $f_2(\omega)$ sont réels et positifs. Si ω est racine d'une forme

(1) Comparer KRONECKER, *Sitzungsberichte*, p. 766; 1885; H. WEBER, *Elliptische Functionen*, § 113.

(a, b, a), la racine opposée est $\frac{-1}{\omega}$, $i\omega$ et $\frac{-i}{\omega}$ sont imaginaires conjugués, donc aussi $e^{i\pi\omega}$ et $e^{\frac{-i\pi}{\omega}}$, donc aussi $f_1(\omega)$ et $f_1\left(\frac{-1}{\omega}\right) = f_2(\omega)$ et l'égalité

$$f(\omega)f_1(\omega)f_2(\omega) = \sqrt{2}$$

montre que $f(\omega)$ est réel et positif.

Posons maintenant dans la formule (7) du § 28

$$am^2 + bmn + cn^2 = \psi,$$

et soit

$$a'm^2 + b'mn + c'n^2 = \psi'$$

une autre forme de même discriminant, telle que $\frac{\psi}{\sqrt{-D}}$ et $\frac{\psi'}{\sqrt{-D}}$ aient une partie réelle essentiellement positive pour la même détermination de $\sqrt{-D}$. Soient de plus

$$\omega'_1 = \frac{-b' + i\sqrt{-D}}{2c'}, \qquad \omega'_2 = \frac{b' + i\sqrt{-D}}{2c'}$$

les quantités correspondantes à ω_1, ω_2 pour ψ', ayant comme ω_1, ω_2 (d'après les conventions précédentes) leurs parties imaginaires positives. La formule citée donne

$$(1) \qquad \lim_{\rho=0}\left[\sum_{m,n}\frac{1}{\psi^{1+\rho}} - \sum_{m,n}\frac{1}{\psi'^{1+\rho}}\right] = \frac{2\pi}{\sqrt{-D}}\log\frac{c}{c'}\,\frac{\eta^2(\omega'_1)\,\eta^2(\omega'_2)}{\eta^2(\omega_1)\,\eta^2(\omega_2)},$$

la détermination de $\sqrt{-D}$ étant la même partout.

Pour me rapprocher des notations plus ordinaires, j'échangerai, dans ce qui va suivre, a et c. On a alors, au lieu de (1), les logarithmes ayant toujours la détermination de module minimum

$$(2) \qquad \lim_{\rho=0}\sum_{m,n}\left[\frac{1}{\psi^{1+\rho}} - \frac{1}{\psi'^{1+\rho}}\right] = \frac{2\pi}{\sqrt{-D}}\log\frac{a}{a'}\,\frac{\eta^2(\omega'_1)\,\eta^2(\omega'_2)}{\eta^2(\omega_1)\,\eta^2(\omega_2)},$$

$$\omega_1 = \frac{-b + i\sqrt{-D}}{2a}, \qquad \omega_2 = \frac{b + i\sqrt{-D}}{2a},$$

$$\omega'_1 = \frac{-b' + i\sqrt{-D}}{2a'}, \qquad \omega'_2 = \frac{b' + i\sqrt{-D}}{2a'}.$$

Prenons, par exemple,

$$a' = 2a, \quad b' = b - 2a, \quad c' = \frac{a - b + c}{2}, \quad b'^2 - 4a'c' = b^2 - 4ac = D,$$

$$\omega'_1 = \frac{\omega_1 + 1}{2}, \quad \omega'_2 = \frac{\omega_2 - 1}{2}, \quad \frac{a}{a'} = \frac{1}{2};$$

on aura

$$\eta(\omega'_1) = \eta\, \frac{\omega_1 + 1}{2} = e^{-\frac{\pi i}{24}} f(\omega_1)\, f(\omega_2) \text{ (§ 30)},$$

$$\eta(\omega'_2) = \eta\, \frac{\omega_2 - 1}{2} = \eta\left(\frac{\omega_2 + 1}{2} - 1\right) = e^{-\frac{\pi i}{12}}\eta\left(\frac{\omega_2 + 1}{2}\right) = e^{-\frac{\pi i}{24}} f(\omega_2)\, y(\omega_2),$$

$$\frac{2\pi}{\sqrt{-D}} \log \frac{a}{a'}\, \frac{\eta^2(\omega'_1)\, \eta^2(\omega'_2)}{\eta^2(\omega_1)\, \eta^2(\omega_2)} = \frac{2\pi}{\sqrt{-D}} \log \frac{f^2(\omega_1)\, f^2(\omega_2)}{2},$$

$$(3) \qquad \lim_{\rho = 0} \sum_{m,n} \left[\frac{1}{\psi^{1+\rho}} - \frac{1}{\psi'^{1+\rho}}\right] = \frac{4\pi}{\sqrt{-D}} \log \frac{f(\omega_1)\, f(\omega_2)}{\sqrt{2}},$$

en supposant que a, b, c et les logarithmes sont réels [$f(\omega_1)$ et $f(\omega_2)$ sont conjugués].

Faisons encore

$$a' = aq, \quad b' = b, \quad c' = \frac{c}{q}, \quad b'^2 - 4a'c' = b^2 - 4ac = D,$$

$$\omega'_1 = \frac{\omega_1}{q}, \quad \omega'_2 = \frac{\omega_2}{q}, \quad \frac{a}{a'} = \frac{1}{q};$$

on aura

$$(4) \qquad \lim_{\rho = 0} \sum_{m,n} \left[\frac{1}{\psi^{1+\rho}} - \frac{1}{\psi'^{1+\rho}}\right] = \frac{4\pi}{\sqrt{-D}} \log \frac{1}{\sqrt{q}}\, \frac{\eta\left(\frac{\omega_1}{q}\right) \eta\left(\frac{\omega_2}{q}\right)}{\eta(\omega_1)\, \eta(\omega_2)}$$

et, pour $q = 2$,

$$(5) \qquad \lim_{\rho = 0} \sum_{m,n} \left[\frac{1}{\psi^{1+\rho}} - \frac{1}{\psi'^{1+\rho}}\right] = \frac{4\pi}{\sqrt{-D}} \log \frac{f_1(\omega_1)\, f_1(\omega_2)}{\sqrt{2}},$$

en supposant toujours a, b, c et les logarithmes réels.

Supposons que ψ soit une forme arithmétique où $b \equiv 0 \pmod{q}$, $c \equiv 0 \pmod{q^2}$, q étant un entier. On aura

$$\psi' = q\psi_2,$$

en posant

$$\psi_2 = \left(a, \frac{b}{q}, \frac{c}{q^2}\right),$$

forme de discriminant Dq^{-2}. La formule précédente donne alors

$$\frac{4\pi}{\sqrt{-D}} \log \frac{1}{\sqrt{q}} \frac{\eta\left(\frac{\omega_1}{q}\right)\eta\left(\frac{\omega_2}{q}\right)}{\eta(\omega_1)\,\eta(\omega_2)}$$
$$= \lim_{\rho=0}\left[\sum_{m,n}\psi^{-1-\rho} - \left(\frac{1}{q} - \rho\frac{\log q}{q} + \ldots\right)\sum_{m,n}\psi_2^{-1-\rho}\right],$$

et comme

$$\lim_{\rho=0} \rho \sum_{m,n} \psi_2^{-1-\rho} = \frac{2\pi q}{\sqrt{-D}},$$

$$\frac{4\pi}{\sqrt{-D}} \log \frac{1}{\sqrt{q}} \frac{\eta\left(\frac{\omega_1}{q}\right)\eta\left(\frac{\omega_2}{q}\right)}{\eta(\omega_1)\,\eta(\omega_2)}$$
$$= \lim_{\rho=0}\left[\sum_{m,n}\psi^{-1-\rho} - \frac{1}{q}\sum_{m,n}\psi_2^{-1-\rho}\right] + \frac{4\pi}{\sqrt{-D}}\log q^{\frac{1}{2}},$$

$$(6) \qquad \frac{4\pi}{\sqrt{-D}} \log \frac{\eta\left(\frac{\omega_1}{q}\right)\eta\left(\frac{\omega_2}{q}\right)}{q\,\eta(\omega_1)\,\eta(\omega_2)} = \lim_{\rho=0}\left[\sum_{m,n}\psi^{-1-\rho} - \frac{1}{q}\sum_{m,n}\psi_2^{-1-\rho}\right].$$

Je donnerai de suite quelques applications immédiates.

Soit Q *impair et* $D_0 \equiv 0 \pmod 4$. On peut toujours dans $\psi = (a, b, c)$ supposer a impair (§ 9) et c également impair [sans quoi la forme parallèle $(a,\ b + 2a,\ a + b + c)$ remplirait ces conditions]. On a alors dans (3)

$$\psi' = (a', b', c') \equiv \left(2a,\ b - 2a,\ \frac{a - b + c}{2}\right) = (a, b, c)\left(2,\ 2\lambda,\ \frac{4\lambda^2 - D}{8}\right)$$
$$\left[\lambda \equiv \frac{D}{4} \pmod 2 \quad \text{et} \quad 0 \leqq \lambda \leqq 1\right],$$

car, si $D \equiv 0 \pmod 8$, il faut $b \equiv 2 \pmod 4$, donc $b - 2a \equiv 2\lambda \pmod 4$, et, si $D \equiv 4 \pmod 8$, il faut $b \equiv 0 \pmod 4$, donc encore $b - 2a \equiv 2\lambda \pmod 4$. Comme $\left(2,\ 2\lambda,\ \frac{4\lambda^2 - D}{8}\right)$ est primitive, ψ' l'est aussi et parcourt avec ψ un système de représentants de l'ordre primitif. Alors (3) donne

$$\sum_{\psi}^{D} \log \frac{f(\omega_1)\,f(\omega_2)}{\sqrt{2}} = 0,$$

la sommation s'étendant à un système de représentants ψ de classes primitives où a et c sont impairs, le discriminant étant D.

ω_2 est opposée à ψ et parcourt en même temps que ω_1 un système de racines; si donc on prend des formes opposées pour représenter des classes opposées, ω_1 et ω_2 parcourront *les mêmes racines,* en exceptant toutefois les racines répondant aux classes ambiguës. Ainsi, n'étaient les classes ambiguës, on pourrait écrire

$$\sum_{\psi}^{D} \frac{f(\omega_1)}{\sqrt[4]{2}} = 0.$$

Si ψ est une classe ambiguë, ou bien cette classe admet un représentant du type $(a, 0, c)$ que nous prendrons pour ψ et pour lequel $\omega_1 = \omega_2$, ou bien elle admet un représentant du type (a, b, a) que nous prendrions alors pour ψ et pour lequel

$$\omega_2 = \frac{-1}{\omega_1}, \qquad f(\omega_1) = f\left(\frac{-1}{\omega_1}\right), \qquad f(\omega_1) = f(\omega_2).$$

On a donc bien en réalité

$$\sum_{\psi}^{D} \log \frac{f(\omega_1)}{\sqrt[4]{2}} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \prod_{\omega} f(\omega) = 2^{\frac{K(D)}{4}},$$

ω parcourant un système de formes $\psi = (a, b, c)$, ainsi définies :

Dans les classes non ambiguës $a \equiv c \equiv 1 \pmod 2$;

Dans les classes ambiguës $\psi = (a, 0, c)$, (a, b, a) selon le type qu'admet la classe.

Soit toujours Q *impair et* $D \equiv 1 \pmod 8$. On peut toujours, dans $\psi = (a, b, c)$, supposer a impair et, par conséquent, c pair, $b \equiv 1 \pmod 4$, sans quoi la forme $(a, b + 2a, a + b + c)$, parallèle à (a, b, c), remplirait ces conditions. Alors la forme

$$\psi' = (a', b', c') = \left(2a, b, \frac{c}{2}\right) = (a, b, c)\left(2, 1, \frac{1 - D}{8}\right)$$

parcourt en même temps que ψ un système de classes primitives, et l'on a, d'après (5),

$$(7) \qquad \sum_{\psi}^{D} \log \frac{f_1(\omega_1) f_1(\omega_2)}{\sqrt{2}} = 0.$$

Ici toutes les classes ambiguës admettent le représentant (a, b, a); mais, dans une forme de ce type, a est pair, puisque

$$b^2 - 4a^2 \equiv 1 \pmod 8.$$

Considérons alors la forme parallèle

$$[a, b+2a\varepsilon, \quad \varepsilon(b+2a\varepsilon)], \qquad b+2a\varepsilon \equiv -1 \pmod 4), \quad \varepsilon = \pm 1,$$

et prenons pour ψ la forme complémentaire

$$\psi = [\varepsilon(b+2a\varepsilon), -b-2a\varepsilon, a]$$

dont la racine est ω_1 opposée à ω_2. On aura

$$\omega_2 = \omega_1 - \varepsilon,$$
$$f_1^{48}(\omega_2) = f^{48}(\omega_1).$$

Donc, ω_1 parcourant les racines des formes $\psi = (a, b, c)$ ainsi déterminées,

$$\prod_{\omega_1}^{D} {}^{0} f_1^{48}(\omega_1) = 2^{12K(D)},$$

l'indice o signifiant que, pour les racines ω_1 représentant les classes ambiguës, il faut remplacer f_1 par $\sqrt{ff_1}$, ou, ω parcourant les racines des formes

$$(a, b+2ha, c+hb+h^2a), \qquad h \equiv 1 \pmod 2),$$

$$\prod_{\omega}^{D} {}^{0} f^{48}(\omega) = 2^{12K(D)}.$$

l'indice o marquant que, dans les classes ambiguës, il faut remplacer f par $\sqrt{ff_1}$, ou, ω_2 parcourant les racines des formes $(c, -b, a)$,

$$\prod_{\omega_2}^{D} {}^{0} f_2^{48}(\omega_2) = 2^{12K(D)},$$

l'indice o rappelant que, dans les classes ambiguës, on doit remplacer f_2 par $\sqrt{ff_2}$.

On n'a été obligé de prendre les puissances 48[ièmes] qu'à cause du facteur $e^{\frac{\varepsilon\pi i}{24}}$ introduit par chaque classe ambiguë. Si donc il y a $g = 2^{\lambda-1}$ classes ambiguës, λ étant ≥ 4, on pourra écrire

$$\prod_{\omega_1}^{D} {}^{0} f_1^{6}(\omega_1) = 2^{\frac{3}{2}K(D)},$$

et l'on en déduira comme tout à l'heure deux formules analogues. Nous trouverons des résultats plus complets au § 39.

Soient plus généralement D *quelconque et* $q \neq 2$ *un facteur premier ou non de* D_0 *n'entrant pas dans* Q. Prenons pour ψ une forme normale et posons

$$\varphi = \left(q, \lambda q, \frac{\lambda^2 q^2 - D}{4q}\right),$$
$$\left[0 \leqq \lambda \leqq 1, \ \lambda \equiv \frac{D}{q} \pmod 2\right].$$

Nous aurons $\psi\varphi = \psi'$, car $b \equiv \lambda q \pmod{2q}$; ψ' sera primitive dans (4) et, par conséquent,

$$\sum_{\psi}^{D} \log \frac{\eta\left(\frac{\omega_1}{q}\right)\eta\left(\frac{\omega_2}{q}\right)}{\sqrt{q}\,\eta(\omega_1)\,\eta(\omega_2)} = 0.$$

Si q est premier, donc ici impair, on pourra prendre pour ψ une forme binormale. Le premier membre de l'égalité précédente peut s'écrire, comme on le verra au § 37 (3),

$$\frac{1}{\sigma}\sum_{\omega}^{D} \log \frac{\eta^{2\sigma}\left(\frac{\omega}{q}\right)}{q^{\frac{\sigma}{2}}\,\eta^{2\sigma}(\omega)},$$

ω parcourant les racines d'un système de formes ψ ainsi défini :

Dans les classes non ambiguës, ψ est normale ou binormale ; il suffit même que $b \equiv c \equiv 0 \pmod q$;

Dans les classes ambiguës admettant un représentant $(a, 0, c)$, $\psi = (a, 0, c)$;

Dans les classes ambiguës admettant un représentant (a, b, a)

$$\psi = (a, \quad b + 2a(\varepsilon + \mu q), \quad a + b(\varepsilon + \mu q) + a(\varepsilon + \mu q)^2),$$
$$b + 2a\varepsilon \equiv 0 \pmod q, \qquad \varepsilon = \pm 1, \qquad 2\mu + \varepsilon \equiv 0 \pmod 3.$$

On peut toujours prendre $\sigma = 8$; si $q \equiv 1 \pmod 2$ on peut prendre $\sigma = 4$; si $q \equiv 1 \pmod 4$ on peut prendre $\sigma = 2$; si $q = 1 \pmod 8$ on peut prendre $\sigma = 1$.

Donc

$$\prod_{\omega}^{D} \frac{\eta^{2\sigma}\left(\frac{\omega}{q}\right)}{\eta^{2\sigma}(\omega)} = q^{\frac{\sigma}{2}K(D)}.$$

Prenons maintenant la forme $\psi = (a, b, c)$ telle que a soit premier à Q, $b \equiv 0 \pmod Q$, $c \equiv 0 \pmod{Q^2}$.

On a dans (6), en prenant pour q un diviseur quelconque d de Q,

$$d\psi_2 = \left(ad, b, \frac{c}{d}\right) = (a, b, c)\left(d, \lambda d, \frac{\lambda^2 d^2 - D}{4d}\right),$$

$$\lambda \equiv D_0 d'^2 \pmod 2 \quad \text{et} \quad 0 \leqq \lambda \leqq 1, \quad dd' = Q,$$

car $b \equiv \lambda d \pmod{2d}$ puisque $\frac{b}{d}$ est de la parité de $\frac{b^2}{d^2} - 4a\frac{c}{d^2} = D_0 d'^2$. Donc

$$\frac{4\pi}{\sqrt{-D}} \log \frac{1}{\sqrt{d}} \frac{\eta\left(\frac{\omega_1}{d}\right)\eta\left(\frac{\omega_2}{d}\right)}{\eta(\omega_1)\eta(\omega_2)} = \lim_{\rho=0} \sum_{m,n} \psi^{-1-\rho} - \frac{1}{d} \lim_{\rho=0} \sum_{m,n} \psi_2^{-1-\rho},$$

d'où, comme précédemment, en posant

$$\frac{4\pi}{\sqrt{-D}} \sum_{\psi}^{D} \log \frac{\eta\left(\frac{\omega_1}{d}\right)\eta\left(\frac{\omega_2}{d}\right)}{\sqrt{d}\,\eta(\omega_1)\eta(\omega_2)} = N(D, d),$$

$$N(D, d) = \lim_{\rho=0} \sum_{\psi}^{D} \sum_{m,n} \psi^{-1-\rho} - \frac{K(D)}{d\,K(D_0 d'^2)} \lim_{\rho=0} \sum_{\psi_2}^{D_0 d'^2} \sum_{m,n} \psi_0^{-1-\rho},$$

car, quand ψ parcourt un système de représentants des classes primitives pour le discriminant D, ψ_2 parcourt $\frac{K(D)}{K(D_0 d'^2)}$ fois un semblable système pour le discriminant D_0 (§ 13).

On peut remarquer que, si l'on prend $d = Q$, l'expression

$$\frac{Q}{K(D)} \left[\lim_{\rho=0} \sum_{\psi}^{D_0 Q^2} \sum_{m,n} \psi^{-1-\rho} - N(D_0 Q^2, Q) \right],$$

ou celle-ci

$$\frac{\log E(D_0 Q^2)}{\prod_q \left[1 - \left(\frac{D_0}{Q}\right)\frac{1}{q}\right]} \left[\lim_{\rho=0} \sum_{a, bQ, cQ^2}^{D_0 Q^2} \sum_{m,n} (am^2 + bQmn + cQ^2 n^2)^{-1-\rho} - N(D_0 Q^2, Q) \right]$$

(q parcourant les facteurs premiers différents de Q),

$$\omega = \frac{-bQ + \sqrt{-D_0 Q^2}}{a},$$

est infinie comme une quantité indépendante de Q, ou, plus

exactement, que *les deux premiers coefficients* du développement de

$$\rho \frac{E(D_0 Q^2)}{\prod_q \left[1 - \left(\frac{D_0}{q}\right)\frac{1}{q}\right]} \left[\sum_{a,\,bQ,\,cQ^2}^{D_0 Q^2} \sum_{m,n} (am^2 + bQmn + cQ_2 n^2)^{-1-\rho} - N(D_0 Q^2, Q) \right],$$

suivant les puissances de ρ, sont indépendants de Q.

§ 35. Application de la première formule de Kronecker au cas où Q est une puissance d'un nombre premier.

Avant de traiter la théorie générale, j'exposerai d'abord d'une manière plus directe un cas particulier important.

Supposons que Q se réduise à une puissance d'un facteur premier positif q. On aura, en gardant les notations du § 19,

$$D = D' 2^k = D_0 q^{2\alpha} < 0, \quad Q = q^{\alpha}, \quad D' \equiv 1 \pmod 2, \quad |D'| = \prod_i |p_i|^{\gamma},$$
$$k \geqq 0, \qquad \alpha \geqq 0,$$

q pouvant être égal à 2 et, s'il est impair, étant l'un des $|p_i|$, soit $q = |p_1|$.

On se rappelle que tout caractère peut se mettre sous la forme $\left(\frac{D_1}{\ }\right)$, D_1 étant un discriminant fondamental, diviseur binormal, de l'un des trois types D_{01}, $-4D_{01}$, $8D_{01}$, D_{01} parcourant les produits des p_i différents et l'unité (¹). Ici les deux derniers types ne se présenteront que si $\alpha \geqq 1$ et $q = 2$. Je désignerai par λ l'entier minimum tel que $D_0 q^{2\lambda} = D'_0$ admette le caractère considéré $\left(\frac{D_1}{\ }\right)$.

Supposons d'abord $\alpha > 0$. Soit

$$\psi_{2i} = \left(a, \frac{b}{q^i}, \frac{c}{q^{2i}}\right), \qquad i \leqq \alpha, \qquad b^2 - 4ac = D = D_0 q^{2\alpha}$$

(¹) Le caractère qui est égal à $+1$ dans tous les genres de D en vertu de la relation $\left(\frac{2^k}{\ }\right)\left(\frac{D}{\ }\right) = 1$ sera toujours remplacé par $\left(\frac{1}{\ }\right)$. Ainsi, pour le discriminant $D = -3.2^2$, le caractère $\left(\frac{-3}{\ }\right)$, qui est égal à $+1$ dans tous les genres, sera représenté par $\left(\frac{1}{\ }\right)$.

une forme binormale de discriminant Dq^{-2i} (¹). Posons

$$\psi_{2i+1} = \left(aq, \frac{b}{q^i}, \frac{c}{q^{-i+1}}\right),$$

$$\varphi_i = \left(q, \nu q, \frac{\nu^2 q^2 - Dq^{-2i}}{4q}\right),$$

$$\left[0 \leqq \nu \leqq 1, \quad \nu \equiv D \pmod 2, \quad \text{si} \quad q \neq 2; \quad \nu \equiv \frac{Dq^{-2i}}{4} \pmod 2, \quad \text{si} \quad q = 2\right].$$

et convenons de supprimer les indices nuls. ψ_{2i+1} et φ_i sont deux formes de discriminant Dq^{-2i}. ψ_{2i+1} existe et est d'ordre q tant que i est $< \alpha$. On a toujours

$$\psi_{2i}\varphi_i = \psi_{2i+1} = q\psi_{2i+2}, \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqq i < \alpha,$$

car a est premier à q, et, puisque

$$b \equiv 0 \pmod{q^{2\alpha}} \equiv D \pmod 2,$$

il est facile de voir que, même si $q = 2$, on a

$$\frac{b}{q^i} \equiv \nu q \qquad \pmod{2q}.$$

Ainsi en particulier, si $q = 2$, $\alpha = 1$, $D_0 \equiv 1 \pmod 4$, donc $D \equiv 4 \pmod{16}$, $b \equiv 2 \pmod 4$, $c \equiv 0 \pmod 4$, on aura

$$(a, b, c)\left(2, 2, \frac{4-D}{8}\right) = \left(2a, b, \frac{c}{2}\right) = \psi_1 = 2\psi_2.$$

Si $D_0 \equiv 0 \pmod q$, ψ_{2i+1}, d'après la construction des formes binormales, existe encore pour $i = \alpha$, et l'on a

$$\psi_{2\alpha}\varphi_\alpha = \psi_{2\alpha+1}.$$

Mais $\psi_{2\alpha+1}$ et φ_α sont nécessairement primitives, puisque leur discriminant est fondamental.

Soit maintenant $\alpha = 0$ avec $D_0 \equiv 0 \pmod q$. On aura, comme pour le cas précédent, lorsque $i = \alpha$,

$$\psi_{2\alpha} = \psi = (a, b, c), \qquad \psi\varphi = \psi_1 = \left(aq, b, \frac{c}{q}\right),$$

ψ et ψ_1 étant primitives.

Ainsi quand $D_0 \equiv 0 \pmod q$ et $i = \alpha$, $\psi_{2\alpha}$ et $\psi_{2\alpha+1}$ parcourent

(¹) Si ψ_1 est binormale, ψ_{2i} le sera nécessairement.

en même temps un système de représentants des classes primitives (§ 13).

Quand ψ_{2i-2} parcourt un système de représentants pour le discriminant Dq^{-2i+2}, ψ_{2i} parcourt

$$r_i = \frac{K(Dq^{-2i+2})}{K(Dq^{-2i})} = q\left[1 - \left(\frac{Dq^{-2i}}{q}\right)\frac{1}{q}\right]\frac{\log E(Dq^{-2i})}{\log E(Dq^{-2i+2})} \qquad (i \leqq \alpha)$$

fois un système de représentants pour le discriminant Dq^{-2i}. Si Dq^{-2i} est divisible par q, on aura

$r_i = q$ en général,

$r_i = 1$ si $Dq^{-2i} = D_0 = -q = -3$ ou si $Dq^{-2i} = D_0 = -q^2 = -4$.

Désignons par $R_i^{(1)}, R_i^{(2)}, \ldots, R_i^{(r_i)}$, r_i formes représentantes du groupe $\mathfrak{K}_i$ des classes primitives de discriminant Dq^{-2i} telles que

$$\psi_{2i-1}\mathfrak{K}_i = \psi_{2i-1}.$$

Les r_i formes $\psi_{2i-2}\varphi_{i-1}R_i^{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots, r_i)$ étant équivalentes à ψ_{2i-1}, on pourra, au lieu de prendre ces r_i formes pour représenter r_i fois leur classe, prendre r_i fois ψ_{2i-1} d'ordre q; la classe primitive correspondante sera représentée r_i fois par ψ_{2i}.

Supposons que ψ_{2i-1} soit d'ordre q, et considérons un caractère $\left(\frac{D_1}{\quad}\right)$ appartenant à son discriminant Dq^{-2i+2}; sa valeur dans la classe de ψ_{2i-2} est $\left(\frac{D_1}{a}\right)$. Soit $\varepsilon_i^{(k)}$ sa valeur dans celle de $R_i^{(k)}$. Si $\left(\frac{D_1}{\quad}\right)$ appartient à Dq^{-2i}, sa valeur dans la classe de $\psi_{2i-1}R_i^{(k)}$ sera $\varepsilon_i^{(k)}\left(\frac{D_1}{a}\right)$ et, dans les r_i classes de $\mathfrak{K}_i$, on aura $\varepsilon_i^{(k)} = +1$ [§ 19, fin, et § 21; ici d'ailleurs il n'y aurait de difficulté que pour le caractère $\left(\frac{p_1}{\quad}\right)$]. Si $\left(\frac{D_1}{\quad}\right)$ n'appartient pas à Dq^{-2i}, $\varepsilon_i^{(k)}\left(\frac{D_1}{a}\right)$ n'a aucune relation avec le genre de ψ_{2i-1} mais on peut affirmer que $\varepsilon_i^{(k)}$ prend dans les r_i classes de $\mathfrak{K}_i$ autant de fois la valeur $+1$ que la valeur -1.

Cela posé, d'après les résultats du § 18, on a

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{a,b,c}^{D}\left(\frac{D_1}{a}\right)\sum_{m,n}\left(\frac{q^{2\alpha}}{m}\right)(am^2 + bmn + cn^2)^{-1-\rho} \\ &\quad = \tau_D H_\rho(q^{2\alpha}D_1)\,H_\rho(q^{2\alpha}D_2''), \\ &\qquad D_1 D_2'' = D, \qquad \rho > 0, \end{aligned}\right.$$

en posant, comme au § 16,

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{D}{k}\right)k^{-1-\rho}=H_\rho(D),\qquad \text{d'où}\qquad \lim_{\rho=0}H_\rho(D)=\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{D}{k}\right)\frac{1}{k}=H(D),$$

et en marquant par un indice le discriminant auquel se rapporte la valeur τ. D'ailleurs la transformation (17) du § 16 donne

$$\sum_{m,n}\left(\frac{Q^2}{m}\right)(am^2+bmn+cn^2)^{-1-\rho}=\sum_d\frac{\varepsilon_d}{d^{2+2\rho}}\sum_{m,n}\left(am^2+\frac{b}{d}mn+\frac{c}{d^2}n^2\right)^{-1-\rho}$$
$$(\rho>0),$$

d parcourant tous les diviseurs de Q. On en déduit, puisque a est premier à 2D, *si* $\left(\frac{D_1}{a}\right)$ *est un caractère pour les deux discriminants* D, $\frac{D}{d^2}$,

$$\sum_{a,b,c}^{D}\left(\frac{D_1}{a}\right)\sum_{m,n}\left(\frac{q^{2\alpha}}{m}\right)(am^2+bmn+cn^2)^{-1-\rho}$$
$$=\sum_d\frac{\varepsilon_d}{d^{2+2\rho}}\frac{K(D)}{K\left(\frac{D}{d^2}\right)}\sum_{a,\frac{b}{d},\frac{c}{d^2}}^{Dd^{-2}}\left(\frac{D_1}{a}\right)\sum_{m,n}\left(am^2+\frac{b}{d}mn+\frac{c}{d^2}n^2\right)^{-1-\rho},$$

d prenant les seules valeurs

$$1,\quad q,\quad q^2,\quad \ldots,\quad q^\alpha,$$

auxquelles correspondent

$$\varepsilon_1=1,\qquad \varepsilon_q=-1,\qquad \varepsilon_{q^2}=\varepsilon_{q^3}=\ldots=0$$

et, par suite,

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}&\sum_{a,b,c}^{D}\left(\frac{D_1}{a}\right)\sum_{m,n}\left(\frac{q^{2\alpha}}{m}\right)(am^2+bmn+cn^2)^{-1-\rho}\\ &=\sum_{a,b,c}^{D}\left(\frac{D_1}{a}\right)\sum_{m,n}(am^2+bmn+cn^2)^{-1-\rho}\\ &\quad-\frac{r_1}{q^{2+2\rho}}\sum_{a,\frac{b}{q},\frac{c}{q^2}}^{Dq^{-2}}\left(\frac{D_1}{a}\right)\sum_{m,n}\left(am^2+\frac{b}{q}mn+\frac{c}{q^2}n^2\right)^{-1-\rho}.\end{aligned}\right.$$

En désignant par $\sum\limits_{\psi}^{\mathrm{D}}$ une sommation qui s'étend à tout un système de représentants des classes primitives du discriminant D, on obtient, d'après (1),

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} \sum\limits_{\psi}^{\mathrm{D}}\left(\frac{\mathrm{D}_1}{a}\right)\sum\limits_{m,n}\psi^{-1-\rho}-\frac{1}{q^{1+2\rho}}\sum\limits_{\psi_2}^{\mathrm{D}q^{-2}}\left(\frac{\mathrm{D}_1}{a}\right)\sum\limits_{m,n}\psi_2^{-1-\rho} \\ \qquad = 2\,\mathrm{H}_\rho(q^{2\alpha}\mathrm{D}_1)\,\mathrm{H}_\rho(q^{2\alpha}\mathrm{D}''_2), \\ \sum\limits_{\psi_2}^{\mathrm{D}q^{-2}}\left(\frac{\mathrm{D}_1}{a}\right)\sum\limits_{m,n}\psi_2^{-1-\rho}-\frac{1}{q^{1+2\rho}}\sum\limits_{\psi_4}^{\mathrm{D}q^{-4}}\left(\frac{\mathrm{D}_1}{a}\right)\sum\limits_{m,n}\psi_4^{-1-\rho} \\ \qquad = 2\,\mathrm{H}_\rho(q^{2(\alpha-1)}\mathrm{D}_1)\,\mathrm{H}_\rho(q^{2(\alpha-1)}\mathrm{D}''_2\,q^{-2}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \sum\limits_{\psi_{2(\alpha-\lambda)-2}}^{\mathrm{D}q^{-2(\alpha-\lambda)+2}}\left(\frac{\mathrm{D}_1}{a}\right)\sum\limits_{m,n}\psi_{2(\alpha-\lambda)-2}^{-1-\rho}-\frac{r_{\alpha-\lambda}}{q^{2+2\rho}}\sum\limits_{\psi_{2(\alpha-\lambda)}}^{\mathrm{D}q^{-2(\alpha-\lambda)}}\left(\frac{\mathrm{D}_1}{a}\right)\sum\limits_{m,n}\psi_{2(\alpha-\lambda)}^{-1-\rho} \\ \qquad = 2\,\mathrm{H}_\rho(q^{2(\lambda+1)}\mathrm{D}_1)\,\mathrm{H}_\rho(q^{2(\lambda+1)}\mathrm{D}''_2\,q^{-2(\alpha-\lambda)+2}). \end{array}\right.$$

Si $\lambda > 0$, puisque le caractère $\left(\frac{\mathrm{D}_1}{}\right)$ prend autant de fois la valeur $+1$ que la valeur -1 dans les $r_{\alpha-\lambda+1}$ classes du groupe $\mathfrak{K}_{\alpha-\lambda+1}$, l'égalité suivante sera

$$(5)\quad \sum\limits_{\psi_{2(\alpha-\lambda)}}^{\mathrm{D}q^{-2(\alpha-\lambda)}}\left(\frac{\mathrm{D}_1}{a}\right)\sum\limits_{m,n}\psi_{2(\alpha-\lambda)}^{-1-\rho}=\tau_{\mathrm{D}'_0}\,\mathrm{H}_\rho(q^{2\lambda}\mathrm{D}_1)\mathrm{H}_\rho(q^{2\lambda}\mathrm{D}''_2\,q^{-2(\alpha-\lambda)}).$$

Si $\lambda = 0$, D_1 est impair et $\left(\frac{\mathrm{D}_1}{}\right)$ appartient à D_0. Alors la formule (1) donne immédiatement

$$(6)\quad \sum\limits_{\psi_{2\alpha}}^{\mathrm{D}q^{-2\alpha}}\left(\frac{\mathrm{D}_1}{a}\right)\sum\limits_{m,n}\psi_{2\alpha}^{-1-\rho}=2\,\mathrm{H}_\rho(\mathrm{D}_1)\,\mathrm{H}_\rho(\mathrm{D}''_2\,q^{-2\alpha}),$$

qui rentre dans la formule précédente. Éliminons alors toutes les séries, sauf la première, entre les égalités (3), (4), (5), en remarquant que, si l'on pose

$$\mathrm{D}''_2\,q^{-2(\alpha-\lambda)}=\mathrm{D}_2,\qquad \mathrm{D}_1\mathrm{D}_2=\mathrm{D}_0\,q^{2\lambda},\qquad \mathrm{D}_1\,q^{2\lambda}=\mathrm{D}'_1,\qquad \mathrm{D}_2\,q^{2\lambda}=\mathrm{D}'_2,$$

on aura, quel que soit l'entier $\nu \geqq 1$ (§ 17),

$$H_\rho(q^{2\nu}D'_1) = H_\rho(D'_1)\left[1 - \left(\frac{D'_1}{q}\right)\frac{1}{q^{1+\rho}}\right],$$

$$H_\rho(q^{2\nu}D'_2) = H_\rho(D'_2)\left[1 - \left(\frac{D'_2}{q}\right)\frac{1}{q^{1+\rho}}\right];$$

il viendra

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{\psi}^{D}\left(\frac{D_1}{a}\right)\sum_{m,n}\psi^{-1-\rho} \\ &\quad = 2\,H_\rho(D'_1)\,H_\rho(D'_2)\left\{\left[1-\left(\frac{D'_1}{q}\right)\frac{1}{q^{1+\rho}}\right]\left[1-\left(\frac{D'_2}{q}\right)\frac{1}{q^{1+\rho}}\right]\right. \\ &\qquad\qquad \times\left[1+\frac{1}{q^{1+2\rho}}+\ldots+\left(\frac{1}{q^{1+2\rho}}\right)^{\alpha-\lambda-1}\right] \\ &\qquad\qquad \left.+\left[1-\left(\frac{D'_0}{q}\right)\frac{1}{q}\right]\left(\frac{1}{q^{1+2\rho}}\right)^{\alpha-\lambda}\right\}, \end{aligned}\right.$$

ou

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{\psi}^{D}\left(\frac{D_1}{A}\right)\sum_{m,n}\psi^{-1-\rho} \\ &\quad = 2\,H_\rho(D'_1)\,H_\rho(D'_2)\left\{\left[1-\left(\frac{D'_1}{q}\right)\frac{1}{q^{1+\rho}}\right]\left[1-\left(\frac{D'_2}{q}\right)\frac{1}{q^{1+\rho}}\right]\frac{1-\left(\dfrac{1}{q^{1+2\rho}}\right)^{\alpha-\lambda}}{1-\dfrac{1}{q^{1+2\rho}}}\right. \\ &\qquad\qquad \left.+\left(1-\left(\frac{D'_0}{q}\right)\frac{1}{q}\right)^{\operatorname{sgn}\alpha}\left(\frac{1}{q^{1+2\rho}}\right)^{\alpha-\lambda}\right\}, \\ &\qquad\qquad (A \text{ premier à } 2D, \text{ représentable par } \psi), \end{aligned}\right.$$

et cette formule convient au cas où $\alpha = \lambda \geqq 0$ avec

$$D'_0 = D_0 \equiv 0 \pmod{q}$$

comme au cas où $\alpha = \lambda = 0$ et où q ne divise pas D, D pouvant d'ailleurs être égal à -4 ou à -3. La théorie des quantités ε_n permettait d'écrire presque immédiatement (8). On le verra à un point de vue plus général au § 39.

Il est évident que ψ peut être remplacé ans chaque classe par une forme équivalente.

§ 36. Application des deux formules fondamentales au cas où Q est une puissance d'un nombre premier.

Il est maintenant facile d'introduire les fonctions elliptiques au moyen de la seconde relation fondamentale de Kronecker. Nous supposerons maintenant que q divise D, c'est-à-dire que, si $\alpha = 0$,

$$D_0 \equiv 0 \pmod{q},$$

et nous distinguerons trois cas.

1° $\alpha > \lambda$. Nous avons trouvé au § 34

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l}
\dfrac{4\pi}{\sqrt{-D}} \log \dfrac{1}{q} \dfrac{\eta\left(\dfrac{\omega_1}{q}\right)\eta\left(\dfrac{\omega_2}{q}\right)}{\eta(\omega_1)\eta(\omega_2)} = \lim_{\rho=0}\left[\sum_{m,n} \psi^{-1-\rho} - \dfrac{1}{q}\sum_{m,n} \psi_2^{-1-\rho}\right], \\
\omega_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{-D}}{2a}, \qquad \omega_2 = \dfrac{b + i\sqrt{-D}}{2a}, \\
\psi = (a, b, c), \qquad b^2 - 4ac = D, \qquad \left(a, \dfrac{b}{q}, \dfrac{c}{q^2}\right) = \psi_2, \\
a \text{ premier à } q, \qquad b \equiv 0 \pmod{q}, \qquad c \equiv 0 \pmod{q^2}, \\
\psi\varphi = q\psi_2, \qquad \varphi = \left(q, \lambda q, \dfrac{\lambda^2 q^2 - D}{4q}\right), \\
0 \leq \lambda \leq 1, \qquad \lambda \equiv D \pmod{q} \quad \text{si } q \text{ est impair}, \\
\lambda \equiv \dfrac{D}{4} \pmod{q} \quad \text{si} \quad q = 2;
\end{array}\right.$$

ψ étant une forme positive, $\sqrt{-D}$ devra être pris positivement.

Quand ψ parcourt un système de représentants de l'ordre primitif pour le discriminant D, ψ_2 parcourt r_1 fois un système semblable pour le discriminant $\dfrac{D}{q^2}$. On aura donc

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l}
\dfrac{4\pi}{\sqrt{-D}} \sum_{\psi}^{D} \left(\dfrac{D_1}{A}\right) \log \dfrac{1}{q} \dfrac{\eta\left(\dfrac{\omega_1}{q}\right)\eta\left(\dfrac{\omega_2}{q}\right)}{\eta(\omega_1)\eta(\omega_2)} \\
= \lim_{\rho=0}\left[\sum_{\psi}^{D}\left(\dfrac{D_1}{A}\right)\sum_{m,n}\psi^{-1-\rho} - \dfrac{r_1}{q}\sum_{\psi_2}^{Dq^{-2}}\left(\dfrac{D_1}{A}\right)\sum_{m,n}\psi_2^{-1-\rho}\right],
\end{array}\right.$$

car, α étant supérieur à λ, D et Dq^{-2}, admettront tous deux le

caractère $\left(\frac{D_1}{A}\right)$ quel qu'il soit, et ce caractère aura la même valeur pour les r_1 classes du groupe $\mathfrak{K}_1$. Donc, d'après la formule (8) du § 35, si $\alpha > 1$, et par conséquent $r_1 = q$,

$$\begin{aligned}\frac{4\pi}{\sqrt{-D}}\sum_{\psi}^{D}\left(\frac{D_1}{A}\right)\log\frac{1}{q}\,\frac{\eta\left(\frac{\omega_1}{q}\right)\eta\left(\frac{\omega_2}{q}\right)}{\eta(\omega_1)\,\eta(\omega_2)}\\ =\lim_{\rho=0}\tau_D H_\rho(D'_1)\,H_\rho(D'_2)\Bigg\{\left(1-\left(\frac{D'_1}{q}\right)\frac{1}{q^{1+\rho}}\right)\left(1-\left(\frac{D'_2}{q}\right)\frac{1}{q^{1+\rho}}\right)\left(\frac{1}{q^{1+2\rho}}\right)^{\alpha-\lambda-1}\\ +\left(1-\left(\frac{D'_0}{q}\right)\frac{1}{q}\right)\left[\left(\frac{1}{q^{1+2\rho}}\right)^{\alpha-\lambda}-\left(\frac{1}{q^{1+2\rho}}\right)^{\alpha-\lambda-1}\right]\Bigg\};\end{aligned}$$

si $\alpha = 1$, donc $r = q\left(1-\left(\frac{D'_0}{q}\right)\frac{1}{q}\right)$, on obtient une formule qui rentre dans la précédente. On a donc, quel que soit $\alpha \geqq 0$, en faisant sortir $\tau_D H_\rho(D'_2)\left(\frac{1}{q^{1+2\rho}}\right)^{\alpha-\lambda}$ du signe *limite* et en développant sous ce signe, suivant les puissances de ρ,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{4\pi}{\sqrt{-D}}\sum_{\psi}^{D}\left(\frac{D_1}{A}\right)\log\frac{1}{q}\,\frac{\eta\left(\frac{\omega_1}{q}\right)\eta\left(\frac{\omega_2}{q}\right)}{\eta(\omega_1)\,\eta(\omega_2)}\\ =\frac{\tau_D}{q^{\alpha-\lambda}}H(D'_2)\lim_{\rho=0}H_\rho(D'_1)\Bigg\{q\left(1-\left(\frac{D'_1}{q}\right)\frac{1}{q}\right)\left(1-\left(\frac{D'_2}{q}\right)\frac{1}{q}\right)+(1-q)\left(1-\left(\frac{D'_0}{q}\right)\frac{1}{q}\right)\\ +\rho\log q\left[2\left(\frac{D'_0}{q}\right)-\left(\frac{D'_1}{q}\right)-\left(\frac{D'_2}{q}\right)\right]+\ldots\Bigg\}.\end{aligned}\right.$$

Si $D_1 \neq 1$, on aura, en observant que $\left(\frac{D'_1 D'_2}{q}\right)-\left(\frac{D'_0}{q}\right)$ est toujours nul,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{2\pi}{\sqrt{-D}}\sum_{\psi}^{D}\left(\frac{D_1}{A}\right)\log\frac{1}{q}\,\frac{\eta\left(\frac{\omega_1}{q}\right)\eta\left(\frac{\omega_2}{q}\right)}{\eta(\omega_1)\,\eta(\omega_2)}\\ =\frac{\tau_D}{q^{\alpha-\lambda}}H(D'_1)\,H(D'_2)\left(1-\left(\frac{D'_1}{q}\right)\right)\left(1-\left(\frac{D'_2}{q}\right)\right)\\ \omega_1=\frac{-b+\sqrt{-D}}{2a},\quad \omega_2=\frac{b+\sqrt{-D}}{2a},\quad D_1\neq 1,\quad D'_1 D'_2 = D_0 q^{2\lambda}.\end{aligned}\right.$$

Si $D_1 = D_{01} = 1$, donc $\lambda = 0$, ce qui est le seul cas à considérer pour les discriminants ne donnant lieu qu'à un genre, on a

$$D'_1 = 1,\qquad \lim_{\rho=0}\rho H'_\rho(1) = 1,\qquad D'_2 = D_2 = D_0.$$

Donc la dernière limite de la formule (3) est égale à

$$\left(1 - \left(\frac{D'_2}{q}\right)\right) \log \frac{1}{q},$$

c'est-à-dire que la formule (4) convient encore si $D_1 = 1$, pourvu qu'on y remplace l'expression indéterminée $H(D_1)\left(1 - \left(\frac{D_1}{q}\right)\right)$ par $\log \frac{1}{q}$.

2° $\alpha = \lambda > 0$. Le caractère $\left(\frac{D_1}{A}\right)$ prenant des valeurs opposées dans les deux classes du groupe $\mathfrak{A}_1$, on aura, au lieu de (2), en observant l'égalité (5) du § 35,

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{4\pi}{\sqrt{-D}} \sum\limits_{\psi}^{D} \left(\dfrac{D_1}{A}\right) \log \dfrac{1}{q} \dfrac{\eta\left(\frac{\omega_1}{q}\right) \eta\left(\frac{\omega_2}{q}\right)}{\eta(\omega_1)\,\eta(\omega_2)} \\ \quad = \lim\limits_{\rho=0} \sum\limits_{\psi}^{D} \left(\dfrac{D_1}{A}\right) \sum\limits_{m,n} \psi^{-1-\rho} = 2H(D'_1)\,H(D'_2) \\ \quad (D_1 \neq 1;\quad D = D'_0;\quad \lambda > 0), \end{cases}$$

et, puisque l'on a ici

$$D'_1 \equiv D'_2 \equiv 0 \pmod{q},$$

cette formule rentre dans (4).

3° $\alpha = \lambda = 0$, c'est-à-dire $D = D_0$, $D_1 = D_{01}$. D'après les fixations faites au début du § 35, la forme $\psi_1 = \left(aq, b, \frac{c}{q}\right)$ sera primitive en même temps que $\psi = (a, b, c)$ et, par conséquent, la formule (4) du § 33 donnera

$$\frac{4\pi}{\sqrt{-D}} \log \frac{\eta\left(\frac{\omega_1}{q}\right) \eta\left(\frac{\omega_2}{q}\right)}{\sqrt{q}\,\eta(\omega_1)\,\eta(\omega_2)} = \lim_{\rho=0} \left[\sum_{m,n} \psi^{-1-\rho} - \sum_{m,n} \psi_1^{-1-\rho}\right],$$

d'où

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{4\pi}{\sqrt{-D}} \sum\limits_{\psi}^{D} \left(\dfrac{D_1}{A}\right) \log \dfrac{\eta\left(\frac{\omega_1}{q}\right) \eta\left(\frac{\omega_2}{q}\right)}{\sqrt{q}\,\eta(\omega_1)\,\eta(\omega_2)} \\ \quad = \lim\limits_{\rho=0} \left[\sum\limits_{\psi}^{D} \left(\dfrac{D_1}{A}\right) \sum\limits_{m,n} \psi^{-1-\rho} - \sum\limits_{\psi_1}^{D} \left(\dfrac{D_1}{A}\right) \sum\limits_{m,n} \psi_1^{-1-\rho}\right]. \end{cases}$$

Si $D_1 = 1$, le second membre est évidemment nul; supposons donc $D_1 \neq 1$.

Si D_1 n'est pas premier à q, $D_2 = \frac{D_0}{D_1}$ l'est certainement, et l'on a

$$\left(\frac{D_1 D_2}{A}\right) = 1, \quad \left(\frac{D_1}{A}\right) = \left(\frac{D_2}{A}\right).$$

Appelons D_i celui des deux nombres D_1, D_2 qui est premier à q et D_k l'autre. D'après les remarques faites sur la composition des genres, $\left(\frac{D_i}{Aq}\right)$ sera un caractère de ψ_1 et, par suite, en écrivant

$$\begin{aligned}&\frac{4\pi}{\sqrt{-D}}\sum_{\psi}^{D}\left(\frac{D_1}{A}\right)\log\frac{\eta\left(\frac{\omega_1}{q}\right)\eta\left(\frac{\omega_2}{q}\right)}{\sqrt{q}\,\eta(\omega_1)\,\eta(\omega_2)}\\ &\quad=\lim_{\rho=0}\left[\sum_{\psi}^{D}\left(\frac{D_1}{A}\right)\sum_{m,n}\psi^{-1-\rho}-\left(\frac{D_i}{q}\right)\sum_{\psi_1}^{D}\left(\frac{D_i}{Aq}\right)\sum_{m,n}\psi_1^{-1-\rho}\right],\end{aligned}$$

on voit que, si $\left(\frac{D_i}{q}\right) = 1$, le second membre est nul; si au contraire $\left(\frac{D_i}{q}\right) = -1$, le second membre est

$$2\lim_{\rho=0}\sum_{\psi}^{D}\left(\frac{D_1}{A}\right)\sum_{m,n}\psi^{-1-\rho} = 4\,H(D_1)\,H(D_2).$$

Donc

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{4\pi}{\sqrt{-D}}\sum_{\psi}^{D}\left(\frac{D_1}{A}\right)\log\frac{\eta\left(\frac{\omega_1}{q}\right)\eta\left(\frac{\omega_2}{q}\right)}{\sqrt{q}\,\eta(\omega_1)\,\eta(\omega_2)}\\ &\quad = 2\,H(D_1)\,H(D_2)\left[1-\left(\frac{D_i}{q}\right)-\left(\frac{D_k}{q}\right)\right].\end{aligned}\right.$$

Cette formule convient encore si $D_1 = 1$, à la condition de remplacer l'expression indéterminée $H(D_1)\left(1-\left(\frac{D_1}{q}\right)\right)$ par

$$o = \log\frac{1}{q}\operatorname{sgn} x.$$

Elle rentre encore dans la formule (4) puisque, d'après les hypothèses, on a ici

$$D'_0 = D_0 \equiv 0 \pmod{q}.$$

§ 37. Simplification des formules précédentes.

Transformons maintenant le premier membre des formules (3), (6), (7) du paragraphe précédent. Nous dirons que la racine ω_1 de (a, b, c) parcourt un système de représentants des racines des formes ψ ou simplement un système de racines. Observons aussi que ω_2 est la racine de $(a, -b, c)$ qui appartient au même genre que (a, b, c). Donc, n'étaient les classes ambiguës, on pourrait écrire, comme au § 34, en représentant par des formes opposées les classes opposées,

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{\psi}^{D}\left(\frac{D_1}{A}\right)\log\frac{1}{q}\,\frac{\eta\left(\frac{\omega_1}{q}\right)\eta\left(\frac{\omega_2}{q}\right)}{\eta(\omega_1)\,\eta(\omega_2)}\\ &\quad = \log\prod_{\psi}^{D}\left[\frac{1}{q}\,\frac{\eta\left(\frac{\omega_1}{q}\right)\eta\left(\frac{\omega_2}{q}\right)}{\eta(\omega_1)\,\eta(\omega_2)}\right]^{\left(\frac{D_1}{A}\right)} = 2\log\prod_{\psi}^{D}\left[\frac{\eta\left(\frac{\omega_1}{q}\right)}{\sqrt{q}\,\eta(\omega_1)}\right]^{\left(\frac{D_1}{A}\right)}, \end{aligned}\right.$$

$\sqrt{q}$ étant une racine arithmétique; le produit serait en effet réel et positif, $i\omega_1$ et $i\omega_2$ étant conjuguées. Étudions les modifications introduites par les classes ambiguës, en reprenant les trois cas du paragraphe précédent.

1° $\alpha > \lambda$ donc $\alpha \geqq 1$. Considérons les classes admettant le type $(a, 0, c)$. On peut toujours supposer que a est premier à q, sans quoi on prendrait la forme équivalente $(c, 0, a)$ (¹).

Soit q impair. Puisque $4ac = D$, on a $c \equiv 0 \pmod{q^2}$. De plus

$$(a, 0, c)\varphi \backsim \left(aq, 0, \frac{c}{q}\right).$$

Nous prendrons pour représentant de classe $\psi = (a, 0, c)$.

Soit $q = 2$. Si $D \equiv 0 \pmod 8$, donc $D \equiv 0 \pmod{16}$ puisque $\alpha \geqq 1$, on aura

$$a \equiv 1 \pmod 2, \qquad c \equiv 0 \pmod 4, \qquad (a, 0, c)\varphi \backsim \left(2a, 0, \frac{c}{q}\right).$$

(¹) Lorsque D est pair et admet par conséquent le type $(a, 0, c)$, ce raisonnement suppose que q est premier ou puissance d'un nombre premier.

Nous prendrons encore $\psi = (a, 0, c)$. Si $D \equiv 4 \pmod{8}$, donc $D_0 \equiv 1 \pmod{4}$ puisque $\alpha = 1$, donc $D \equiv 4 \pmod{16}$; on aura

$$a \equiv c \equiv 1 \pmod{2}, \qquad a + c \equiv 0 \pmod{4},$$
$$(a, 0, c) \backsim (a, 2a, c + a),$$
$$(a, 2a, c + a)\underset{\cdot}{\varphi} \backsim \left(2a, 2a, \frac{c + a}{2}\right).$$

Nous prendrons $\psi = (a, 2a, c + a)$.

Considérons maintenant les classes ambiguës admettant le type (a, b, a) où nous savons que a est premier à D, donc à q.

Soit q impair. $b + 2a$ ou $b - 2a$ est divisible par q^2, car leur produit est divisible par $q^{2\alpha}$ et leur différence $4a$ est première à q. On aura donc

$$b + 2a\varepsilon \equiv 0 \pmod{q^2}, \qquad \varepsilon = \pm 1,$$
$$(a, b, a) \backsim (a, b + 2a\varepsilon, \varepsilon(b + 2a\varepsilon)),$$
$$(2) \qquad (a, b + 2a\varepsilon, \varepsilon(b + 2a\varepsilon))\varphi \backsim \left(aq, b + 2a\varepsilon, \varepsilon\frac{b + 2a\varepsilon}{q}\right).$$

Nous prendrons

$$\psi = (a, b + 2a\varepsilon, \varepsilon(b + 2a\varepsilon)).$$

Soit $q = 2$. Comme $\alpha \geqq 1$, on ne peut avoir $D \equiv 4 \pmod{8}$ que si $D_0 \equiv 1 \pmod{4}$. Donc le type (a, b, a) ne se présentera que si $D \equiv 0 \pmod{32}$. Alors $b \equiv 2 \pmod{4}$ et les deux facteurs $b + 2a$, $b - 2a$ sont $\equiv 0 \pmod{4}$. L'équivalence (2) aura toujours lieu, et nous prendrons encore

$$\psi = (a, b + 2a\varepsilon, \varepsilon(b + 2a\varepsilon)), \qquad \varepsilon = \pm 1 \quad \textit{ad libitum}.$$

Revenons maintenant à l'expression (1).

Si (a, b, c) est du type $(a, 0, c)$, $\omega_1 = \omega_2$ et, par conséquent, les classes ambiguës représentées par $(a, 0, c)$ ne font aucune difficulté [1].

---

[1] On pourrait alors évidemment prendre pour représentant (a, b, c) au lieu de $(a, 0, c)$, la forme $(a, 2\mu a, c + \mu^2 a)$ $(\mu \equiv 0 \pmod{q})$, car si ω'_1 est la racine de cette forme et ω'_2 la racine opposée, on a, d'après les formules de transformations, qui seront rappelées tout à l'heure,

$$\frac{\eta_1\left(\frac{\omega'_1}{q}\right)\eta_1\left(\frac{\omega'_2}{q}\right)}{\eta_1(\omega'_1)\,\eta_1(\omega'_2)} = \frac{\eta_1\left(\frac{\omega_1}{q}\right)\eta_1\left(\frac{\omega_2}{q}\right)}{\eta_1(\omega_1)\,\eta_1(\omega_2)} = \frac{\eta_1^2\left(\frac{\omega_1}{q}\right)}{\eta_1^2(\omega_1)}.$$

Si (a, b, c) est du type $(a, 2a, c+a)$, donc $q=2$, $\alpha=1$, $D_0 \equiv 1 \pmod 4$, $a \equiv c \equiv 1 \pmod 2$, on a

$$\omega_2 = \omega_1 + 2,$$

donc

$$\frac{\eta\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\eta\left(\frac{\omega_2}{2}\right)}{\eta(\omega_1)\,\eta(\omega_2)} = f_1(\omega_1)f_1(\omega_1+2) = f_1^2(\omega_1)e^{-\frac{\pi i}{12}}.$$

On peut seulement conclure

$$\log \prod_{\psi}^{D} \frac{f_1(\omega_1)f_1(\omega_2)}{q} = \frac{1}{24}\log \prod_{\psi}^{D} \frac{f_1^{48}(\omega_1)}{q^{24}}$$

les logarithmes étant réels.

Si (a, b, c) est du type $(a, b+2a\varepsilon, \varepsilon(b+2a\varepsilon))$, $\varepsilon = \pm 1$, $b+2a\varepsilon = 0 \pmod{q^{2\alpha}}$, considérons la forme équivalente (a, b, a). Soient ω', $\frac{-1}{\omega'}$ les racines de (a, b, a), $(a, -b, a)$ liées à ω_1, ω_2 par

$$\omega_1 = \omega' - \varepsilon, \qquad \omega_2 = \frac{-1}{\omega'} + \varepsilon.$$

Posons, pour abréger,

$$\frac{\eta\left(\frac{\omega_1}{q}\right)\eta\left(\frac{\omega_2}{q}\right)}{\eta(\omega_1)\,\eta(\omega_2)} = M.$$

On aura

$$M = \frac{\eta\left(\frac{\omega'-\varepsilon}{q}\right)\eta\left(\frac{\varepsilon\omega'-1}{q\,\omega'}\right)}{\eta(\omega'-\varepsilon)\,\eta\left(\frac{-1}{\omega'}+\varepsilon\right)}.$$

Or la formule de transformation de la fonction $\eta(\omega)$ est

$$\eta\left(\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right) = E\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \omega\\ \gamma & \delta & \end{pmatrix}\eta(\omega), \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

$$E\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \omega\\ \gamma & \delta & \end{pmatrix} = \left(\frac{\beta \operatorname{sgn}\alpha}{\alpha}\right) i^{\frac{|\alpha|-1}{2}} e^{\frac{\pi i}{12}[\alpha(\gamma-\beta)-(\alpha^2-1)\beta\delta]}\left(\sqrt{(\alpha+\beta\omega)\operatorname{sgn}\alpha}\right) \quad \text{si} \quad \alpha \equiv 1 \pmod 2,$$

$$E\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \omega\\ \gamma & \delta & \end{pmatrix} = \left(\frac{\alpha \operatorname{sgn}\beta}{\beta}\right) i^{\frac{1-|\beta|}{2}} e^{\frac{\pi i}{12}[\beta(\alpha+\delta)-(\beta^2-1)\alpha\gamma]}\left(\sqrt{-i(\alpha+\beta\omega)\operatorname{sgn}\beta}\right) \quad \text{si} \quad \beta \equiv 1 \pmod 2.$$

d'où en particulier, on l'a vu,

$$\eta(\omega+h) = e^{\frac{h\pi i}{12}}\eta(\omega) \qquad (h \text{ entier positif ou négatif}),$$
$$\eta\left(\frac{-1}{\omega}\right) = (\sqrt{-i\omega})\eta(\omega).$$

Remarquons maintenant que

$$\frac{\varepsilon\omega'-1}{q\omega'} = \frac{\varepsilon\frac{\omega'-\varepsilon}{q}}{\varepsilon+q\frac{\omega'-\varepsilon}{q}},$$

et que, par suite,

$$\eta\left(\frac{\varepsilon\omega'-1}{q\omega'}\right) = \mathrm{E}\begin{pmatrix}\varepsilon & q & \frac{\omega'-\varepsilon}{q}\\ 0 & \varepsilon & \end{pmatrix}\eta\left(\frac{\omega'-\varepsilon}{q}\right).$$

Prenons la première expression de $\mathrm{E}\begin{pmatrix}\varepsilon & q & \frac{\omega'-\varepsilon}{q}\\ 0 & \varepsilon & \end{pmatrix}$ qui laisse la liberté de faire q pair ou impair; elle donne

$$\mathrm{E}\begin{pmatrix}\varepsilon & q & \frac{\omega'-\varepsilon}{q}\\ 0 & q & \end{pmatrix} = e^{-q\varepsilon\frac{\pi i}{12}}(\sqrt{\varepsilon\omega'}),$$

ω' ayant sa partie imaginaire positive, et l'on a, en posant

$$\omega' = re^{i\theta}, \qquad 0 < \theta < \pi,$$
$$(\sqrt{\omega'}) = |\sqrt{r}|e^{i\frac{\theta}{2}}, \qquad 0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2},$$
$$(\sqrt{\varepsilon\omega'}) = (\sqrt{\omega'})e^{\frac{i\pi}{4}(\varepsilon-1)},$$

car le second membre, égal à $|\sqrt{r}|e^{i\left[\frac{\theta}{2}-\frac{(1-\varepsilon)\pi}{4}\right]}$, a toujours sa partie réelle positive; donc

$$\mathrm{E}\begin{pmatrix}\varepsilon & q & \frac{\omega'-\varepsilon}{q}\\ 0 & q & \end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{12}(3\varepsilon-3-q\varepsilon)}(\sqrt{\omega'}).$$

De plus

$$\eta(\omega'-\varepsilon)\eta\left(\frac{-1}{\omega'}+\varepsilon\right) = \eta(\omega')\eta\left(\frac{-1}{\omega'}\right) = \eta^2(\omega')(\sqrt{-i\omega'}),$$

et, comme précédemment,

$$(\sqrt{-i\omega'}) = (\sqrt{\omega'})e^{-\frac{\pi i}{4}}.$$

Donc

$$M = \frac{\eta^2\left(\frac{\omega'-\varepsilon}{q}\right)}{\eta^2(\omega')} e^{\frac{\pi i \varepsilon}{12}(3-q)}.$$

Considérons alors la forme parallèle à (a, b, a)

$$(a,\ b+2a(\varepsilon+\mu q),\ a+b(\varepsilon+\mu q)+a(\varepsilon+\mu q)^2),$$

dont la racine est

$$\omega = \omega' - \varepsilon - \mu q;$$

on aura

$$\frac{\eta^2\left(\frac{\omega'-\varepsilon}{q}\right)}{\eta^2(\omega')} = \frac{\eta^2\left(\frac{\omega}{q}+\mu\right)}{\eta^2(\omega+\varepsilon+\mu q)} = \frac{\eta^2\left(\frac{\omega}{q}\right)}{\eta^2(\omega)} e^{\frac{\pi i}{12}[2\mu(1-q)-2\varepsilon]},$$

$$M = \frac{\eta^2\left(\frac{\omega}{q}\right)}{\eta^2(\omega)} e^{\frac{\pi i}{12}(2\mu+\varepsilon)(1-q)} = \frac{\eta^2\left(\frac{\omega}{q}\right)}{\eta^2(\omega)}\theta, \qquad \theta = e^{\frac{\pi i}{12}(2\mu+\varepsilon)(1-q)}.$$

On voit que si q est impair, en prenant $2\mu+\varepsilon \equiv 0 \pmod 3$, on aura

$$\theta^4 = 1;$$

Si $q \equiv 1 \pmod 4$,

$$\theta^2 = 1;$$

Si $q \equiv 1 \pmod 8$,

$$\theta = 1;$$

Si $q = 2$,

$$\theta^8 = 1\ (^1);$$

on a d'ailleurs immédiatement dans ce cas, comme au § 34,

$$M = \frac{\eta\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\eta\left(\frac{\omega_2}{2}\right)}{\eta(\omega_1)\eta(\omega_2)} = f_1(\omega_1)f_1(\omega_2),$$

ou, en gardant les notations précédentes,

$$M = f_1(\omega'-\varepsilon)f_1\left(\frac{-1}{\omega'}+\varepsilon\right),$$

et, puisque

$$f_1(\omega\pm 1) = e^{\mp\frac{\pi i}{24}}f(\omega), \qquad f\left(\frac{-1}{\omega}\right) = f(\omega),$$

$$M = f(\omega')f\left(\frac{-1}{\omega'}\right) = f^2(\omega');$$

(1) Le calcul précédent ne suppose pas q premier; donc, si $q \equiv 0 \pmod 2$ n'est pas premier, $\theta^8 = 1$.

introduisant alors la forme

$$(a,\ b+2\mu a,\ a+\mu b+\mu^2 a) \qquad \mu\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 6),$$

parallèle à (a, b, a) et dont la racine ω est liée à ω' par la relation

$$\omega=\omega'-\mu,$$

nous obtenons

$$M=\theta f_1^2(\omega)=\theta\,\frac{\eta^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\eta^2(\omega)},\qquad \theta=e^{\frac{\pi i}{4}}.$$

On a donc, d'une manière générale,

$$(3)\ \left\{\begin{aligned}&\sum_{\psi}^{D}\left(\frac{D_1}{A}\right)\log\frac{\eta\left(\frac{\omega_1}{q}\right)\eta\left(\frac{\omega_2}{q}\right)}{q\,\eta(\omega_1)\,\eta(\omega_2)}\\ &\quad=\log\prod_{\psi}^{D}\left[\frac{\eta\left(\frac{\omega_1}{q}\right)\eta\left(\frac{\omega_2}{q}\right)}{q\,\eta(\omega_1)\,\eta(\omega_2)}\right]^{\left(\frac{D_1}{A}\right)}=\frac{1}{\sigma}\log\prod_{\omega}^{D}\left[\frac{\eta^{2\sigma}\left(\frac{\omega}{q}\right)}{q^{\sigma}\eta^{2\sigma}(\omega)}\right]^{\left(\frac{D_1}{A}\right)},\end{aligned}\right.$$

ω parcourant les premières racines d'un système de formes primitives $\psi=(a, b, c)$ ainsi définies :

Dans les classes non ambiguës, a est premier à q, $b\equiv 0\ (\mathrm{mod}\, q^{\alpha})$, $c\equiv 0\ (\mathrm{mod}\, q^{2\alpha})$;

Dans les classes ambiguës, admettant un représentant $(a, 0, c)$, $\psi=(a, 0, c)$, sauf si $D_0\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)$ et $\alpha=1$, auquel cas $\psi=(a, 2a, c+a)$;

Dans les classes ambiguës admettant un représentant (a, b, a) :

Si $q\neq 2$,

$$\psi=(a,\ b+2a(\varepsilon+\mu q),\ a+b(\varepsilon+\mu q)+a(\varepsilon+\mu q)^2),$$
$$b+2a\varepsilon\equiv 0\ (\mathrm{mod}\, q^{2\alpha}),\quad \varepsilon=\pm 1,\quad 2\mu+\varepsilon\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3);$$

Si $q=2$,

$$\psi=(a,\ b+2a\varepsilon,\ \varepsilon(b+2a\varepsilon)),\qquad \varepsilon=\pm 1.$$

On peut toujours prendre $\sigma=24$; si $q=2$ et $D_0\not\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)$, $\alpha\neq 1$, on peut prendre $\sigma=8$; si $q\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)$, on peut prendre $\sigma=4$; si $q\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)$, on peut prendre $\sigma=2$; si $q\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 8)$, on peut prendre $\sigma=1$.

2° $\alpha = \lambda > 0$. On obtient de la même manière la formule (3).

3° $\alpha = \lambda = 0$. Pour l'exactitude de la formule (6) du § 36, il suffit que l'on ait, en posant $\psi = (a, b, c)$, a premier à q,

$$b \equiv 0 \pmod{q}, \quad c \equiv 0 \pmod{q},$$

donc $\frac{c}{q}$ premier à q et

$$\psi\varphi \backsim \left(aq, b, \frac{c}{q}\right).$$

Considérons les classes ambiguës admettant le type $(a, 0, c)$, a étant premier à q.

Si q est impair, on prendra $\psi = (a, 0, c)$ comme dans le cas $a > \lambda$.

Si $q = 2$, il faut distinguer :

Si $D = D_0 \equiv 0 \pmod{8}$, on aura, dans $(a, 0, c)$,

$$c \equiv 2 \pmod{4},$$

et l'on prendra encore $\psi = (a, 0, c)$.

Si $D = D_0 \equiv 4 \pmod{8}$, $\frac{D}{4} \equiv -1 \pmod{4}$, on aura, dans $(a, 0, c)$,

$$a \equiv c \equiv 1 \pmod{2}, \qquad a + c \equiv 2 \pmod{4},$$

et l'on prendra $\psi = (a, 2a, c + a)$.

Considérons maintenant les classes ambiguës admettant le type (a, b, a). Elles n'existent ici que si $D \equiv 4 \pmod{8}$, et alors $a \equiv 1 \pmod{2}$, $b \equiv 0 \pmod{4}$. On prendra

$$\psi = (a, b + 2a\varepsilon, \varepsilon(b + 2a\varepsilon)), \qquad b + 2a\varepsilon \equiv 0 \pmod{q}, \qquad \varepsilon = \pm 1.$$

On a alors, au lieu de (3),

$$(4) \quad \log \prod_{\omega}^{D} \left[\frac{\eta\left(\frac{\omega_1}{q}\right) \eta\left(\frac{\omega_2}{q}\right)}{\sqrt{q}\, \eta(\omega_1)\, \eta(\omega_2)} \right]^{\left(\frac{D_1}{A}\right)} = \frac{1}{\sigma} \log \prod_{\omega}^{D} \left[\frac{\eta^{2\sigma}\left(\frac{\omega}{Q}\right)}{q^{\frac{\sigma}{2}}\, \eta^{2\sigma}(\omega)} \right]^{\left(\frac{D_1}{A}\right)}.$$

Toute l'analyse précédente demeure inaltérée si l'on y remplace q par une puissance de q et D_0 par $D_0 P^2$, P étant premier à q. Les formules (3) et (4) subsistent donc encore dans cette hypothèse qui se présentera au § 40.

En réunissant les formules (3), (6), (7) du paragraphe précédent et en tenant compte de (3), (4) et des relations

$$D_2 = D_2'' q^{-2(\alpha-\lambda)}, \qquad D = D_1 D_2'' = D_1 D_2 q^{2(\alpha-\lambda)},$$
$$D_1' D_2' = D_0 q^{2\lambda}, \qquad \left(\frac{D_0'}{q}\right) = \left(\frac{D_1' D_2'}{q}\right),$$

on obtient la formule suivante qui convient encore si $D = -4, -3$:

(5)
$$\frac{1}{\sigma} \log \prod_{\omega}^{D} \frac{\eta^{2\sigma}\left(\frac{\omega}{q}\right)}{q^{\frac{1+\operatorname{sgn}\alpha}{\sigma}} \eta^{2\sigma}(\omega)}$$
$$= \frac{\sqrt{-D_0}}{2\pi}\left(1-\left(\frac{D_1'}{q}\right)\right)\left(1-\left(\frac{D_2'}{q}\right)\right) H(D_1') H(D_2')$$
$$= \frac{K(D_1') K(D_2')}{2 i\pi q^{\lambda}}\left(1-\left(\frac{D_1'}{q}\right)\right)\left(1-\left(\frac{D_2'}{q}\right)\right) \log E(D_1') \log E(D_2');$$

Si $D_1 = 1$,
$$H(D_1')\left(1-\frac{D_1'}{q}\right)\Big) = \log \frac{1}{q} \operatorname{sgn}\alpha;$$

$\sigma = 2^{3-s}$ si $q \equiv 1 \pmod{2^s}$ sauf si $D \equiv 4 \pmod 8$ avec $q = 2$ auquel cas $\sigma = 24$;

ω parcourt les racines d'un système de formes ψ ainsi définies :

Dans les classes non ambiguës ψ est binormale;

Dans les classes ambiguës admettant le type (a, o, c), $\psi = (a, o, c)$, sauf si $D \equiv 4 \pmod 8$ avec $q = 2$, auquel cas $\psi = (a, 2a, c+a)$;

Dans les classes ambiguës admettant le type (a, b, a),

$$\psi = (a,\ b + 2a(\varepsilon + \mu q),\ a + b(\varepsilon + \mu q) + a(\varepsilon + \mu q)^2);$$
$$\varepsilon = \pm 1; \qquad b + 2a\varepsilon \equiv o \pmod{q^{\alpha+1}};$$
$$2\mu + \varepsilon \equiv o \pmod 3 \text{ si } q \not\equiv 2; \qquad \mu = o \text{ si } q = 2.$$

Si $\lambda = o$, on peut supprimer les accents, et de même si $q = 2$ et $\lambda > o$, car alors $D_1 \equiv 4 \pmod 8$ ou $\equiv 8 \pmod{16}$, et, par conséquent,

$$D_1 \equiv D_1' \equiv o \pmod 2, \qquad D_2 = \frac{D_0 q^{2\lambda}}{D_1} \equiv D_2' \equiv o \pmod 2.$$

Dans le cas $q = 2$, on a

$$M = f_1(\omega_1) f_1(\omega_2) = f(\omega_1') f(\omega_2'),$$

ω'_1 étant la racine de

$$(a,\ b+2\mu a,\ c+\mu b+\mu^2 a) \qquad \mu\equiv 1 \pmod 2),$$

et ω'_2 la racine opposée. Donc, dans le cas $D\equiv 4 \pmod 8$, en prenant f au lieu de f_1 et, dans les classes ambiguës, $\psi=(a,\ 0,\ c)$ ou $\psi=(a,\ b,\ a)$ selon le type qu'admet la classe, on pourra faire $\sigma=1$. Dans les classes non ambiguës on prendra alors, au lieu de $(a,\ b,\ c)$,

$$(a,\ b+2\mu a,\ c+\mu b+\mu^2 a) \qquad \mu\equiv 1 \pmod 2).$$

Soit maintenant $\Phi(\omega)$ une fonction quelconque de la racine ω d'une forme ψ qui parcourt un système de représentants de l'ordre primitif et supposons qu'on ait

$$\sum_{\omega}^{D}\left(\frac{D_1}{A}\right)\log\Phi(\omega)=\log F(D_1),$$

le second membre étant connu pour toutes les valeurs D_1 définies précédemment. On pourra calculer la norme de la fonction $\Phi(\omega)$ étendue à toutes les classes d'un genre quelconque G. Soit, en effet, A_0 un nombre représentable par une forme de G; on aura

$$(6) \qquad \sum_{\omega}^{D}\left(\frac{D_1}{A}\right)\left(\frac{D_1}{A_0}\right)\log\Phi(\omega)=\left(\frac{D_1}{A_0}\right)\log F(D_1).$$

Considérons alors le produit

$$\Pi(1+C_i),$$

où C_i parcourt tous les caractères fondamentaux *indépendants* en nombre $\lambda-1$, λ étant le nombre des caractères fondamentaux. Le nombre des termes de Π sera $2^{\lambda-1}=g$, g étant le nombre des genres.

Cela posé, on peut faire parcourir à $\left(\frac{D_1}{\ }\right)$, en conservant à D_1 sa forme de diviseur binormal, tous les caractères résultant des produits des caractères fondamentaux indépendants en y ajoutant l'unité $\left(\frac{1}{\ }\right)$, c'est-à-dire tous les termes du produit Π développé.

Écrivons donc l'égalité (5) pour toutes les valeurs de D_1 ainsi

obtenues et ajoutons. Si l'on désigne par C_{iA}, C_{iA_0} les valeurs du caractère C_i dans les classes qui représentent respectivement A, A_0, on voit que le coefficient d'une quelconque des fonctions $\log\Phi(\omega)$ sera $\Pi(1+C_{iA}C_{iA_0})$. Or cette quantité est nulle si C_{iA} est différent de C_{iA_0} pour une seule des valeurs de i et égale à $2^{\lambda-1}=g$ si $C_{iA}=C_{iA_0}$ pour toutes les valeurs de i, c'est-à-dire si la forme représentée par ω appartient à G. Ainsi on aura, au premier membre de la somme des équations (6)

$$g\sum_{\omega}^{G}\log\Phi(\omega)=g\log\prod_{\omega}^{G}\Phi(\omega),$$

la sommation ou le produit s'étendant à toutes les racines ω qui représentent les classes du genre G, et au second membre une quantité connue.

Appliquant ces considérations aux résultats précédents on pourra calculer les normes de $\dfrac{\eta^\sigma\left(\frac{\omega}{q}\right)}{\eta^\sigma(\omega)}$ ou de $f_1^\sigma(\omega)$ ou de $f^\sigma(\omega)$, relatives à un genre quelconque.

Si toutes les classes sont ambiguës, cas où il n'y a qu'une classe par genre (§ 21), on aura la valeur même de ces fonctions pour chaque racine représentante ω. Si l'on se borne alors à la classe principale dans le cas $D\equiv 0 \pmod 4$, on aura

$$\frac{\eta^\sigma\left(\frac{\sqrt{D}}{q}\right)}{\eta^\sigma(\sqrt{D})},\quad f_1^\sigma\left(\frac{\sqrt{D}}{2}\right),\quad f^\sigma\left(\frac{\sqrt{D}}{2}\right),$$

et puisque $\eta\left(\frac{\sqrt{D}}{q}\right)$, $\eta(\sqrt{D})$, $f_1\left(\frac{\sqrt{D}}{2}\right)$, $f(\sqrt{D})$ sont réels on pourra prendre $\sigma=1$.

On sait que, si $D\equiv 0 \pmod 8$, $f_1^{24}\left(\sqrt{\frac{D}{4}}\right)$ et, si $D\equiv 4 \pmod 8$, $f^{24}\left(\sqrt{\frac{D}{4}}\right)$ est un invariant de la classe principale (§ 29). On pourra ainsi calculer ces invariants.

Une induction d'Euler et de Gauss limiterait à 65 le nombre de ces discriminants remarquables qui sont $\equiv 0 \pmod 4$ et pour lesquels toutes les classes sont ambiguës. Ce sont les suivants,

où le facteur 4 a été séparé afin de laisser en évidence les nombres qui se trouvent dans les Tables de Gauss :

$$1^\circ \quad \left\{\begin{array}{lllll} -4.1, & -4.5, & -4.13, & -4.21, & -4.33, \\ -4.37, & -4.57, & -4.85, & -4.93, & -4.105, \\ -4.133, & -4.165, & -4.177, & -4.253, & -4.273, \\ -4.345, & -4.357, & -4.385, & -4.1365; & \end{array}\right.$$

ces 19 discriminants sont de la forme $D = D_0 = 4P$, $P \equiv -1 \pmod{4}$;

$$2^\circ \quad \left\{\begin{array}{lllll} -4.2, & -4.6, & -4.10, & -4.22, & -4.30, \\ -4.42, & -4.58, & -4.70, & -4.78, & -4.102, \\ -4.130, & -4.190, & -4.210, & -4.330, & -4.462; \end{array}\right.$$

ces 15 discriminants sont de la forme $D = D_0 = 8P$, $P \equiv \pm 1 \pmod{4}$;

$$3^\circ \quad \left\{\begin{array}{llll} -4.3, & -4.7, & -4.15, & -4.12, \\ -4.28, & -4.60, & -4.112, & -4.240; \end{array}\right.$$

ces 8 discriminants sont de la forme $D = D_0 2^{2\alpha}$, $D_0 \equiv 1 \pmod{4}$;

$$4^\circ \qquad -4.4, \quad -4.16;$$

ces 2 discriminants sont de la forme $D = D_0 2^{2\alpha}$, $D_0 = 4P$, $P \equiv -1 \pmod{4}$;

$$5^\circ \quad \left\{\begin{array}{llll} -4.8, & -4.24, & -4.40, & -4.48, \\ -4.88, & -4.120, & -4.168, & -4.232, \\ -4.280, & -4.312, & -4.408, & -4.520, \\ -4.760, & -4.840, & -4.1320, & -4.1848; \end{array}\right.$$

ces 16 discriminants sont de la forme $D = D_0 2^{\alpha}$, $D_0 \equiv 0 \pmod{8}$; $\alpha = 3$ pour $D = -4.48$; $\alpha = 1$ pour tous les autres déterminants de cette catégorie;

$$6^\circ \qquad -4.9, \quad -4.45;$$

ces 2 discriminants sont de la forme $D = D_0 3^2$, $D_0 = 4P$, $P \equiv -1 \pmod{4}$;

$$7^\circ \qquad -4.18, \quad -4.72;$$

ces 2 discriminants sont de la forme $D = D_0 3^2$, $D_0 = 4P$, $P \equiv \pm 1 \pmod{4}$;

$$8^\circ \qquad -4.25;$$

ce discriminant est de la forme $D_0 5^2$, $D_0 = 4P$, $P \equiv -(\bmod 4)$.

La formule (4) permet de calculer les invariants f^{24}, f_1^{24} pour les 60 discriminants des cinq premières catégories.

M. Weber le premier (¹) a établi par une voie différente, du moins quant à la forme, plusieurs formules remarquables relatives aux cas particuliers $q = 2$, $D = D_0 \equiv 0 \pmod 4$ et $q = 2$, $D = D_0 2^2$, $D_0 \equiv 0 \pmod 8$. La formule (4), qui les contient toutes, en est aussi une généralisation.

C'est également M. Weber (²) qui a le premier calculé au moyen de ses formules les invariants des classes principales pour 47 des 60 discriminants signalés à la fin du paragraphe précédent; les 18 invariants qui échappaient à son analyse ont été déterminés ainsi que 40 autres par divers procédés qu'on trouvera exposés dans les Mémoires de l'éminent géomètre (³) ou dans son beau Livre *Elliptische Functionen und algebraische Zahlen* qui contient une Table des résultats obtenus jusqu'ici.

§ 38. Applications numériques : $f(\sqrt{-1})$, $f_1(\sqrt{-2})$, $f(\sqrt{-3})$, $f_1(\sqrt{-4})$, $f(\sqrt{-7})$, $f_1(\sqrt{-12})$, $f(\sqrt{-15})$, $f_1(\sqrt{-16})$, $f_1(\sqrt{-28})$, $f_1(\sqrt{-48})$, $f_1(\sqrt{-60})$, $f_1(\sqrt{-112})$, $f_1(\sqrt{-240})$.

Prenons comme exemple ceux des 65 déterminants singuliers pour lesquels M. Weber a dû recourir aux équations modulaires. Nous aurons à appliquer la formule suivante

$$D = D_0 2^{2\alpha} \equiv 0 \pmod 4,$$

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{D}{4} \equiv 1 \pmod 4, & g \log \frac{f(\sqrt{\frac{1}{4}D})}{\sqrt{2}} \\ \frac{D}{4} \equiv 0, & g \log \frac{f_1(\sqrt{\frac{1}{4}D})}{\sqrt{2}} \\ \frac{D}{4} \equiv -1, & g \log \frac{f(\sqrt{\frac{1}{4}D})}{\sqrt[4]{2}} \\ \frac{D}{4} \equiv 2, & g \log \frac{f_1(\sqrt{\frac{1}{4}D})}{\sqrt[4]{2}} \end{array}\right\} = \sum_{D_1} \frac{1}{4\pi} |\sqrt{D_1 D_2}| H(D_1) H(D_2) \left(1 - \left(\frac{D_1}{2}\right)\right)\left(1 - \left(\frac{D_2}{2}\right)\right).$$

(¹) *Mathematische Annalen*, t. XXXIII, p. 390; 1888.

(²) *Ibid.*, p. 406.

(³) *Ibid.*, p. 408. *Acta mathematica*, t. VI, p. 329; t. XI, p. 333.

où g désigne le nombre des genres, où D_1 parcourt l'unité, les numérateurs symboliques de tous les caractères indépendants relatifs au discriminant D et leurs produits (sans répétition de facteurs), où λ est le plus petit entier pour lequel $D_0 2^{2\lambda}$ admette le caractère $\left(\frac{D_1}{}\right)$, où $D_1 D_2 = D_0 2^{2\lambda}$, où enfin, si $D_i = 1 (i = 1, 2)$, on devra remplacer

$$H(D_i)\left[1 - \left(\frac{D_i}{2}\right)\right] \quad \text{par} \quad \log\frac{1}{2}\,\text{sgn}\,\alpha.$$

$D = -4$; $D_1 = 1$; $g = 1$;

$$\log\frac{f(\sqrt{-1})}{\sqrt[4]{2}} = 0, \qquad f^4(\sqrt{-1}) = 2.$$

$D = -8$; $D_1 = 1$; $g = 1$;

$$\log\frac{f_1(\sqrt{-2})}{\sqrt[4]{2}} = 0, \qquad f_1^4(\sqrt{-2}) = 2.$$

$D = -12 = -3.2^2$; $D_1 = 1$; $g = 1$;

$$\log\frac{f(\sqrt{-3})}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4\pi}\sqrt{3}\,H(-3)\left[1 - \left(\frac{-3}{2}\right)\right]\log\frac{1}{2};$$

or

$$H(-3) = \frac{K(-3)}{\sqrt{-3}}\log E(-3) = \frac{1}{3}\,\frac{K(-3)}{\sqrt{3}}, \qquad K(-3) = 1 \text{ [1]};$$

donc

$$\log\frac{f(\sqrt{-3})}{\sqrt{2}} = \frac{1}{6}\log\frac{1}{2}, \qquad f(\sqrt{-3}) = \sqrt[3]{2}.$$

$D = -4.2^2$; $D_1 = 1$; $g = 1$;

$$\log\frac{f_1(\sqrt{-4})}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4\pi}H(-4)\sqrt{4}\log\frac{1}{2},$$

et comme

$$K(-4) = \frac{K(-4)}{\sqrt{4}}\log E(-4) = \frac{1}{2}\,\frac{K(-4)}{\sqrt{4}}, \qquad K(-4) = 1,$$

$$\log\frac{f_1(\sqrt{-4})}{\sqrt{2}} = \frac{1}{8}\log\frac{1}{2}, \qquad f_1^8(\sqrt{-4}) = 8.$$

---

[1] Voir les Tables de Gauss; *Werke*, t. II, p. 459 et p. 521 (*Bemerkungen*). Il faut pour s'en servir tenir compte des remarques faites au début du Chapitre II.

$D = -7.2^2$; $D_1 = 1$; $g = 1$;

$$\log\frac{f\sqrt{-7})}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4\pi}\sqrt{7}\,\mathrm{H}(-7)\left[1-\left(\frac{-7}{2}\right)\right]\log\frac{1}{2} = 0;$$

donc

$$f(\sqrt{-7}) = \sqrt{2}.$$

$D = -3.2^4$; $D_1 = -4$; $g = 2$;

$$2\log\frac{f_1(\sqrt{-12})}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4\pi}\sqrt{3}\,\mathrm{H}(-3)\left(1-\left(\frac{-3}{2}\right)\right)\log\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi}\sqrt{4.12}\,\mathrm{H}(-4)\,\mathrm{H}(12).$$

Or, on a

$$\mathrm{K}(-3) = \mathrm{K}(-4) = 1, \qquad \mathrm{K}(12) = 2 \text{ (1)},$$
$$\mathrm{K}(12) = \frac{4+\sqrt{12}}{2} = 2+\sqrt{3} = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{2};$$

donc

$$2\log\frac{f_1(\sqrt{-12})}{\sqrt{2}} = \frac{1}{6}\log\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\log\frac{4+\sqrt{12}}{2},$$

et

$$f_1^{24}(\sqrt{-12}) = 2^{10}(2+\sqrt{3})^3 = 2^7(1+\sqrt{3})^6.$$

On peut aussi se servir d'une formule de duplication donnée par

---

(1) Voir les Tables de Gauss (*Werke*, t. II, p. 475). On peut aussi se servir de la formule du nombre des classes

$$\mathrm{K}(D_0)\log \mathrm{E}(D_0) = -\sum_1^{D_0}\left(\frac{D_0}{k}\right)\log\sin\frac{k\pi}{D_0} \qquad (D_0 > 0),$$

qui donne ici

$$\mathrm{K}(12)\log \mathrm{E}(12) = 2\log\frac{\sin\frac{5\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{12}},$$

et, comme on a

$$\sin\frac{5\pi}{12} = \sin(45°+30°) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \qquad \sin\frac{\pi}{12} = \sin(45°-30°) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$
$$\mathrm{K}(12)\log \mathrm{E}(12) = 2\log\frac{4+\sqrt{12}}{2},$$

on voit sans peine que

$$\mathrm{K}(12) = 2, \qquad \mathrm{E}(12) = \frac{4+\sqrt{12}}{2}.$$

M. Weber. On a

$$(1)\qquad f_1^8(\omega)+f_2^8(\omega)=f^8(\omega),$$

$$(2)\qquad f_1^8(\omega)f_2^8(\omega)=\frac{16}{f^8(\omega)},$$

d'où

$$(3)\qquad f_1^8(\omega)-f_2^8(\omega)=\frac{\sqrt{f^{24}(\omega)-64}}{f^4(\omega)}.$$

D'après la valeur trouvée pour $f(\sqrt{-1})$ (§ 30), le radical s'annule pour $\omega=\sqrt{-1}$, et comme le premier membre croît indéfiniment quand q s'approche de zéro par des valeurs réelles et positives, il faut prendre le radical avec le signe $+$. Donc, d'après (1), (2),

$$2f_2^8(\omega)=\frac{f^{12}(\omega)-\sqrt{f^{24}(\omega)-64}}{f^4(\omega)},$$

ou, en multipliant les deux membres par $f^{24}+\sqrt{f^{24}-64}$,

$$f_2^8(\omega)f^4(\omega)\left[f^{12}(\omega)+\sqrt{f^{24}(\omega)=64}\right]=32.$$

On aurait de même, en faisant passer f_1^8 au lieu de f^8 dans les seconds membres de (1), (2),

$$f_1^8(\omega)f_1^4(\omega)\left[f_1^{12}(\omega)+\sqrt{f_1^{24}(\omega)+64}\right]=32.$$

On a d'ailleurs

$$f_1(2\omega)f_2(\omega)=\sqrt{2}\ (^1).$$

Donc

$$(4)\qquad 2f_1^8(2\omega)=f^4(\omega)\left[f^{12}(\omega)+\sqrt{f^{24}(\omega)-64}\right],$$

$$(5)\qquad 2f_1^8(2\omega)=f_1^4(\omega)\left[f_1^{12}(\omega)+\sqrt{f_1^{24}(\omega)-64}\right].$$

Ces formules fournissent $f_1(\sqrt{-4m})$ quand on connaît $f(\sqrt{-m})$ ou $f_1(\sqrt{-m})$.

Ici, en élevant (4) au cube, on aura, puisque $f^3(\sqrt{-3})=2$,

$$8f_1^{24}(\sqrt{-12})=2^4\left[2^4+\sqrt{2^8-64}\right]^3=2^7(1+\sqrt{3})^6,$$

---

(1) Voir *Elliptische Functionen und algebraische Zahlen*, § 29, et, pour le calcul actuel, § 96.

$D = -4.2^4$, $D_1 = 8$, $g = 2$;

$$2 \log \frac{f_1(\sqrt{-16})}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4\pi} H(8) H(-8) \sqrt{8.8} + \frac{1}{4\pi} H(-4) \sqrt{4} \log \frac{1}{2},$$

$$K(8) = K(-8) = K(-4) = 1, \qquad E(8) = \frac{6 + 2\sqrt{8}}{2} = (1 + \sqrt{2})^2,$$

$$2 \log \frac{f_1(\sqrt{-16})}{\sqrt{2}} = \log \frac{(1+\sqrt{2})^4}{2},$$

$$f_1^{16}(\sqrt{-16}) = 2^7 (1 + \sqrt{2})^4.$$

On retrouve aisément cette valeur par la formule (5).

$D = -7.2^4$, $D_1 = -4$, $g = 2$;

$$2 \log \frac{f_1(\sqrt{-28})}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4\pi} H(-4) H(28) \sqrt{4,28} + \frac{1}{4\pi} \left[1 - \left(\frac{-7}{2} \right) \right] H(-7) \sqrt{7} \log \frac{1}{2};$$

le second terme est nul, et l'on a

$$K(-4) = 1, \qquad K(28) = 2, \qquad E(28) = \frac{16 + 3\sqrt{28}}{2} = \frac{(3+\sqrt{7})^2}{2}.$$

Donc

$$f_1^4(\sqrt{-28}) = 2^{\frac{3}{2}} (3 + \sqrt{7}),$$

valeur que fournit encore la formule (5).

$D = -3.5.2^2$, $D_1 = -3$, $g = 2$;

$$2 \log \frac{f(\sqrt{-15})}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{3.5}\, H(-3) H(5) + \left[1 - \left(\frac{-15}{2} \right) \right] H(-15) \sqrt{15} \log \frac{1}{2};$$

le second terme est nul, et l'on a

$$K(-3) = 1, \qquad K(5) = 1 \text{ (1)}, \qquad E(5) = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2;$$

---

(1) K(5) se déduit de K(20) au moyen du groupe $\mathfrak{R}$ qui ne peut ici contenir qu'une classe, puisque $K(20) = 1$. Donc $K(5) = K(20) = 1$.

Les Tables de Gauss donnent $K(20) = 1$, et l'on a

$$E^3(5) = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^3 = \frac{18 + 4\sqrt{20}}{2} = E(20).$$

On peut d'ailleurs obtenir ce résultat, ou s'en servir pour trouver E(20) au

donc

$$6\log\frac{f(\sqrt{-15})}{\sqrt{2}} = \log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2,$$

$$f^3(\sqrt{-15}) = \sqrt{2}(1+\sqrt{5}).$$

$D = -3.2^6$; $\left(\frac{-3}{}\right)$ est toujours égal à $+1$; il reste à prendre $D_1 = 1, -4, 8, -8$; $g = 4$, et l'on a

$$4\log\frac{f_1(\sqrt{-48})}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi}H(-4)H(12)\sqrt{4.12} + \frac{1}{4\pi}H(8)H(24)\sqrt{8.24}$$

$$+ \frac{1}{4\pi}H(-8)H(24)\sqrt{8.24} + \frac{1}{4\pi}H(-3)\sqrt{3.2}\log\frac{1}{2}.$$

Or

$$K(-4) = K(-8) = K(8) = 1, \qquad K(24) = K(-24) = K(48) = 2,$$

$$E(12) = \frac{4+\sqrt{12}}{2} = 2+\sqrt{3} = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{2}, \quad E(8) = \frac{6+2\sqrt{8}}{2} = (1+\sqrt{2})^2,$$

$$E(24) = \frac{10+2\sqrt{24}}{2} = \frac{(3+\sqrt{6})^2}{2}.$$

Donc

$$4\log\frac{f_1(\sqrt{-48})}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\log(2+\sqrt{3}) + \frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2})^2 + \frac{1}{2}\log\frac{(2+\sqrt{6})^2}{2} + \frac{1}{6}\log\frac{1}{2},$$

$$f_1^{24}(\sqrt{-48}) = 2^{\frac{19}{2}}(1+\sqrt{3})^3(1+\sqrt{2})^6(\sqrt{2}+\sqrt{3})^6.$$

On peut aussi partir de la formule •

$$2f_1^8(2\omega) = f_1^4(\omega)\left[f_1^{12}(\omega) + \sqrt{f_1^{24}(\omega)+64}\right],$$

---

moyen de $E(5)$ en partant de

$$K(20) = K(5)\,2\left(1 - \left(\frac{5}{2}\right)\frac{1}{2}\right)\frac{\log E(5)}{\log E(20)} = 3\,K(5)\,\frac{\log E(5)}{\log E(20)}.$$

$K(5)$ est le nombre h' des classes de seconde espèce de déterminant 5, d'après la notation de Gauss, et ce nombre est ici égal à celui de h des classes de première espèce (on a $h = h'$ si $T^2 - DU^2 = 4$ est résoluble en nombres impairs, $h = 3h'$ dans le cas contraire; voir DIRICHLET, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, § 151).

qui, pour $\omega = \sqrt{12}$, $f_1^{24}(\sqrt{-12}) = 2^7(1+\sqrt{3})^6$, d'après l'identité

$$\sqrt{f_1^{24}(\sqrt{-12}) + 64} = 8\sqrt{417 + 240\sqrt{3}} = 8(15 + 11\sqrt{2}),$$

donne

$$8 f_1^{24}(\sqrt{-48}) = 2^{\frac{7}{2}}(1+\sqrt{3})^3\left[2^{\frac{7}{2}}(1+\sqrt{3})^3 + 8(15+11\sqrt{2})\right]^3,$$

$$f_1^{24}(\sqrt{-48}) = 2^{\frac{19}{2}}(1+\sqrt{3})^3(1+\sqrt{2})^6(\sqrt{2}+\sqrt{3})^6.$$

$D = -3.5.2^4$; $D_1 = 1, -3, -4, 12$; $g = 4$; on a

$$4\log\frac{f_1(\sqrt{-60})}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\pi}\sqrt{15}\,H(-3)\,H(5)$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\sqrt{4.60}\,H(-4)\,H(60) + \frac{1}{4\pi}\sqrt{12.20}\,H(12)\,H(-20);$$

$$K(5) = K(-3) = K(-4) = 1, \qquad K(-20) = K(12) = 2, \qquad K(60) = 4,$$

$$E(5) = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \qquad E(60) = \frac{8+\sqrt{60}}{2}, \qquad E(12) = \frac{4+\sqrt{12}}{2};$$

donc

$$4\log\frac{f_1(\sqrt{-60})}{\sqrt{2}} = \frac{1}{3}\log\frac{(1+\sqrt{5})^2}{2} + \frac{1}{2}\log\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2}{2} + \log\frac{(1+\sqrt{3})}{2},$$

$$f_1^{24}(\sqrt{-60}) = 2^5(1+\sqrt{5})^4(2+\sqrt{3})^6(\sqrt{3}+\sqrt{5})^6,$$

$$\sqrt{2}\, f_1^{12}(\sqrt{-60}) = (1+\sqrt{5})^2(1+\sqrt{3})^6(\sqrt{3}+\sqrt{5})^3.$$

En partant de

$$2 f_1^8(\sqrt{-60}) = f^4(\sqrt{-15})\left[f^{12}(\sqrt{-15}) + \sqrt{f^{24}(\sqrt{-15}) - 64}\right],$$

et en observant que

$$f^3(\sqrt{-15}) = \sqrt{2}(1+\sqrt{5}),$$

$$\sqrt{f^{24}(\sqrt{-15}) - 64} = 8\sqrt{1503 + 672\sqrt{5}} = 7\sqrt{15} + 16\sqrt{3},$$

on obtient

$$f_1^{24}(\sqrt{-60}) = 2^8(1+\sqrt{5})^4(28 + 12\sqrt{5} + 16\sqrt{3} + 7\sqrt{15})^2$$
$$= 2^5(1+\sqrt{5})^4(2+\sqrt{3})^6(\sqrt{3}+\sqrt{5})^6,$$

$D = -7.2^6$; $D_1 = 1, -4, 8, -8$; $g = 4$; on a

$$4 \log \frac{f_1\sqrt{-112}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4\pi} H(-4)\,H(28)\sqrt{4.28} + \frac{1}{4\pi} H(8)\,H(-56)\sqrt{8.56}$$
$$+ \frac{1}{4\pi} H(-8)\,H(56)\sqrt{8.56} + \frac{1}{4\pi} H(-7)\left[1 - \left(\frac{-7}{2}\right)\right] \log\frac{1}{2},$$

$$K(-4) = K(-8) = K(8) = 1, \qquad K(28) = K(56) = 2, \qquad K(-56) = 4,$$

$$E(28) = \frac{16 + 3\sqrt{28}}{2} = \left(\frac{3+\sqrt{7}}{2}\right)^2,$$
$$E(8) = \frac{6 + 2\sqrt{8}}{2} = (1 + \sqrt{2})^2,$$
$$E(56) = \frac{30 + 4\sqrt{56}}{2} = (2\sqrt{2} + 7)^2.$$

Donc

$$4 \log \frac{f_1(\sqrt{-112})}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4} \log \left(\frac{3+\sqrt{7}}{2}\right)^2 + \log(1+\sqrt{2})^2 + \log(2\sqrt{2} + \sqrt{7}),$$

ou

$$f_1^8(\sqrt{-112}) = 2^{\frac{7}{2}}(3 + \sqrt{7})(2\sqrt{2} + \sqrt{7})^2(1 + \sqrt{2})^4,$$

résultat qu'on pourrait encore obtenir par la relation

$$2 f_1^8(\sqrt{-112}) = f_1^4(\sqrt{-28})\left[f_1^{12}(\sqrt{-28}) + \sqrt{f_1^{24}(\sqrt{-28}) + 64}\right].$$

$D = -3.5.2^6$; $D_1 = 1, -3, -4, 8, 12, -24, -8, 24$; $g = 8$ et l'on a

$$8 \log \frac{f_1(\sqrt{-240}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\pi}\sqrt{3.5}\;\; H(-3)\,H(5)$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\sqrt{8.15}\;\; H(8)\;\; H(-15) + \frac{1}{4\pi}\sqrt{24.40}\, H(-24)\,H(40)$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\sqrt{4.60}\;\; H(-4)\,H(60) + \frac{1}{4\pi}\sqrt{12.20}\, H(12)\;\; H(-20)$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\sqrt{8.120}\, H(-8)\,H(120) + \frac{1}{4\pi} H(24)\,H(-40),$$

$$K(-3) = K(-4) = K(5) = K(-8) = 1,$$
$$K(8) = K(12) = K(-15) = K(24) = K(-24)$$
$$= K(-20) = K(40) = K(-40) = 2,$$
$$K(60) = K(120) = 4;$$

$$E(5) = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2, \quad E(8) = \frac{6+2\sqrt{8}}{2} = (1+\sqrt{2})^2,$$

$$E(12) = \frac{4+\sqrt{12}}{2} = 2+\sqrt{3}, \quad E(24) = \frac{10+2\sqrt{24}}{2} = \left(\frac{2+\sqrt{6}}{2}\right)^2,$$

$$E(60) = \frac{8+\sqrt{60}}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}\right)^2;$$

$$E(40) = \frac{38+6\sqrt{40}}{2} = (3+\sqrt{10})^2, \quad E(120) = \frac{22+2\sqrt{120}}{2} = (\sqrt{5}+\sqrt{6})^2.$$

Donc

$$8\log\frac{f_1(\sqrt{-240})}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{2}{3}\log\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 2\log(1+\sqrt{2}) + 2\log(3+\sqrt{10}) + \log\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$
$$+ \log(2+\sqrt{3}) + 2\log(\sqrt{5}+\sqrt{6}) + 2\log\frac{2+\sqrt{6}}{\sqrt{2}},$$

ou

$$f_1^{24}(\sqrt{-240})$$
$$= (\sqrt{2})^{17}(1+\sqrt{5})^2(2+\sqrt{3})^3(\sqrt{3}+\sqrt{5})^3(1+\sqrt{2})^6(3+\sqrt{10})^6(\sqrt{2}+\sqrt{3})^6(\sqrt{5}+\sqrt{6})^6,$$

$$f_1^{12}(\sqrt{-240})$$
$$= 2^{\frac{11}{4}}(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{2})^3(1+\sqrt{3})^3(3+\sqrt{10})^3(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3(\sqrt{5}+\sqrt{6})^3\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{5}}.$$

Les résultats précédents concordent avec ceux obtenus algébriquement par M. Weber dans les Mémoires déjà cités.

§ 39. Normes partielles et totales dans le cas général. Solution de l'équation de Pell par les fonctions elliptiques.

Je partirai encore de la formule

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum\left(\frac{Q^2}{m}\right)F(am^2+bmn+cn^2) \\ &\quad = \sum_d \varepsilon_d F(d^2)\sum F\left(am^2+\frac{b}{d}mn+\frac{c}{d^2}n^2\right), \end{aligned} \right.$$

où a est premier à Q, $b \equiv 0 \pmod{Q}$, $c \equiv 0 \pmod{Q^2}$ et où l'on

suppose que F jouit de la propriété

$$F(xy) = F(x)F(y);$$

enfin d parcourt tous les diviseurs de Q.

Soit $\left(\frac{D_1}{}\right)$ un caractère de D, D_1 ayant la forme de discriminant diviseur normal ou binormal. On aura, en ajoutant les équations (1) écrites pour toutes les classes et en tenant compte du théorème sur le groupe $\mathfrak{K}_d$ (§ 22),

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{a,b,c}^{D}\left(\frac{D_1}{A}\right)\sum\left(\frac{Q^2}{m}\right)F(am^2+bmn+cn^2)^{-1-\rho}\\ &=\sum_d \varepsilon_d F(d^2)\frac{K(D)}{K\left(\frac{D}{d^2}\right)}\sum_{a,\frac{b}{d},\frac{c}{d^2}}^{\frac{D}{d^2}}\left(\frac{D_1}{A}\right)\sum F\left(am^2+\frac{b}{d}mn+\frac{c}{d^2}n^2\right).\end{aligned}\right.$$

Posons

$$\begin{aligned} S_{D_1}(Q^2) &= \sum_{a,b,c}^{D}\left(\frac{D_1}{A}\right)\sum\left(\frac{Q^2}{m}\right)F(am^2+bmn+cn^2)\\ &= \tau_D H_\rho(D_1Q^2)H_\rho(D_2Q^2), \qquad D_1D_2 = D,\\ \Sigma_{D_1}(Q^2) &= \sum_{a,b,c}^{D}\left(\frac{D_1}{A}\right)\sum F(am^2+bmn+cn^2),\end{aligned}$$

donc

$$S_{D_1}(1) = \Sigma_{D_1}(1).$$

L'équation (2) pourra s'écrire

$$(3)\qquad \frac{S_{D_1}(Q^2)}{K(D_0Q^2)} = \sum_{d,d'}^{Q}\varepsilon_d F(d^2)\frac{\Sigma_{D_1}(d'^2)}{K(D_0d'^2)} \qquad (dd' = Q),$$

le symbole $\sum\limits_{x,x'}^{n}$ désignant en général une sommation s'étendant à tous les diviseurs x de n $(xx' = n)$.

D'après le théorème rappelé sur le groupe $\mathfrak{K}_d$, les $\Sigma_{D_1}(d'^2)$ dont l'argument est tel que $D_0d'^2$ n'admet pas le caractère $\left(\frac{D_1}{}\right)$ disparaissent. Nous conviendrons que $S_{D_1}(d'^2)$ signifiera o dans les mêmes circonstances. A cause de la propriété dont jouit F,

on déduit de (3), en vertu d'une proposition démontrée dans la théorie des quantités ε_{n},

$$(4) \qquad \frac{\Sigma_{D_1}(Q^2)}{K(D_0 Q^2)} = \sum_{d} F(d^2) \frac{S_{D_1}(d'^2)}{K(D_0 d'^2)}.$$

Des équations (3) et (4) je tirerai deux conséquences importantes.

Prenons

$$F(x) = x^{-1-\rho},$$

et posons

$$(5) \quad \left\{ N(D_0 Q^2, D_1, q) = \frac{4\pi}{\sqrt{-D}} \log \prod_{\psi}^{D} \left[\frac{\eta\left(\frac{\omega_1}{q}\right)\eta\left(\frac{\omega_2}{q}\right)}{q^{\frac{1}{r}}\eta(\omega_1)\eta(\omega_2)} \right]^{\left(\frac{D_1}{A}\right)} \right.$$

q divise Q (alors $r = 1$) ou est premier à Q et divise D_0 ***sans avoir aucun diviseur carré*** (alors $r = 2$);

ω_1 opposée à ω_2 parcourt les racines d'un système de représentants binormaux ψ.

Je supposerai toujours que le troisième argument de N est soumis aux mêmes conditions que q. Si q est premier, ou puissance d'un nombre premier, on aura (§ 36)

$$(5\ bis) \qquad N(D_0 Q^2, D_1, q) = \frac{4\pi}{\sigma\sqrt{-D}} \log \prod_{\omega}^{D} \left[\frac{\eta^{2\sigma}\left(\frac{\omega}{q}\right)}{q^{\frac{\sigma}{r}}\eta^{2\sigma}(\omega)} \right]^{\left(\frac{D_1}{A}\right)}$$

ω et σ ayant le sens expliqué dans la formule (5) du § 36.

Supposons d'abord que q divise $Q = Q'q$.

On aura

$$(6) \qquad N(D_0 Q^2, D_1, q) = \lim_{\rho=0} \left[\Sigma_{D_1}(Q^2) - \frac{1}{q} \frac{K(D)}{K\left(\frac{D}{q^2}\right)} \Sigma_{D_1}\left(\frac{Q^2}{q^2}\right) \right]$$

ou

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} & N(D_0 Q^2, D_1, q) \\ & = K(D) \lim_{\rho=0} \left\{ \sum_{d,d'}^{Q'_q} d'^{-2-2\rho} \frac{S_{D_1}(d^2)}{K(D_0 d^2)} - \frac{1}{q} \sum_{d,d'}^{Q'} d'^{-2-2\rho} \frac{S_{D_1}(d^2)}{K(D_0 d^2)} \right\}, \end{aligned} \right.$$

ou, en désignant par $O(D_1, d)$ une quantité égale à 1 quand le

caractère $\left(\frac{D_1}{\;}\right)$ appartient au discriminant $D_0 d^2$ et à zéro dans le cas contraire,

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} & N(D_0 Q^2, D_1, q) \\ & = K(D) \lim_{\rho=0} \left\{ \sum_{d,d'}^{Q'_q} \frac{\tau_{D_0 d^2} O(D_1, d)}{d'^{2+2\rho}} \frac{H_\rho(D_1 d^2) H_\rho(D_0 D_1^{-1} d^4)}{K(D_0 d^2)} \right. \\ & \qquad \left. - \frac{1}{q} \sum_{d,d'}^{Q'} \frac{\tau_{D_0 d^2} O(D_1, d)}{d'^{2+2\rho}} \frac{H_\rho(D_1 d^2) H_\rho(D_0 D_1^{-1} d^4)}{K(D_0 d^2)} \right\}, \end{aligned}\right.$$

formule d'où l'on déduirait, pour q premier et $Q = q^{2\alpha}$, la formule (5) du § 36, en observant les relations

$$D_0 q^{2\lambda} = D'_0, \qquad D_1 q^{2\lambda} = D'_1, \qquad D_0 D_1^{-1} q^{4\lambda} = D'_2,$$

$$\frac{K(D)}{K(D_0 d^2)} = d' \prod_{p'} \left(1 - \left(\frac{D_0 d^2}{p}\right)\frac{1}{p'}\right) \frac{2}{\tau_{D_0 d^2}}$$

(p' parcourant les facteurs premiers distincts de d').

Supposons maintenant que q soit premier à Q et, par conséquent, divise D_0 sans avoir aucun diviseur carré. Si q est premier, l'un des deux nombres D_1 ou $D_0 D_1^{-1} Q^2$, que nous désignerons par D_i, sera premier à q. Si q n'est pas premier, cela n'aura pas lieu nécessairement, mais nous ferons cette hypothèse. On aura alors, comme dans le troisième cas traité au § 35,

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} & N(D_0 Q^2, D_1, q) \\ & = \lim_{\rho=0} \left(1 - \left(\frac{D_i}{q}\right)\right) \Sigma_{D_1}(Q^2) \\ & = \left[1 - \left(\frac{D_1}{q}\right) - \left(\frac{D_0 D_1^{-1} Q^2}{q}\right)\right] \lim_{\rho=0} \sum_{d,d'}^{Q} \frac{2\, O(D_1, d) H_\rho(D_1 d^2) H_\rho(D_0 D_1^{-1} d^2)}{d'^{1+2\rho}} \prod_{p'} \left(1 - \left(\frac{D_0 d^2}{p'}\right)\frac{1}{p'}\right). \end{aligned}\right.$$

La fonction N jouit de la propriété presque évidente

$$\frac{N(D_0 Q^2 q_1^2, D_1, q_1)}{q_2 K(D_0 Q^2 q_1^2)} + \frac{N(D_0 Q^2 q_1^2 q_2^2, D_1, q_2)}{K(D_0 Q^2 q_1^2 q_2^2)} = \frac{N(D_0 Q^2 q_1^2 q_2^2, D_1, q_1 q_2)}{K(D_0 Q^2 q_1^2 q_2^2)},$$

où les dénominateurs disparaissent si $q_1 = q_2$.

La remarque que, si Q_1 est premier à Q_2, les diviseurs de $Q_1 Q_2$ se composent des produits de ceux de Q_1 par ceux de Q_2, conduit

à des transformations variées de (8), qui sont avantageuses lorsque $\left(\frac{D_1}{\ }\right)$ est un caractère de D_0. J'en ferai ici une application en déterminant les normes complètes des invariants f et f_1, c'est-à-dire les produits de ces invariants quand l'argument parcourt un système de racines représentantes.

Soit $\left(\frac{D_1}{\ }\right)$ un caractère de D_0, et supposons q premier, ne divisant pas Q'' et $Q = Q'' q^\alpha$. Les diviseurs de Q se composant de ceux de Q'' multipliés par $1, q, q^2, \ldots, q^\alpha$, on aura

$$\begin{aligned}
&\sum_{d,d'}^{Q} \frac{\tau_{D_0 d^2}}{d'^{2+2\rho}} \frac{H_\rho(D_1 d^2)\, H_\rho(D_0 D_1^{-1} d^4)}{K(D_0 d^2)} \\
&= \left(\frac{1}{q^{2+2\rho}}\right)^\alpha \sum_{d,d'}^{Q''} \frac{\tau_{D_0 d^2}}{d'^{2+2\rho}} \frac{H_\rho(D_1 d^2)\, H_\rho(D_0 D_1^{-1} d^4)}{K(D_0 d^2)} \\
&\quad + \frac{1}{q^\alpha}\left[1 + \frac{1}{q^{1+2\rho}} + \ldots + \left(\frac{1}{q^{1+2\rho}}\right)^{\alpha-1}\right] \\
&\quad \times \frac{\left(1-\left(\frac{D_1}{q}\right)\frac{1}{q^{1+\rho}}\right)\left(1-\left(\frac{D_0 D_1^{-1} Q''^2}{q}\right)\frac{1}{q^{1+\rho}}\right)}{1-\left(\frac{D_0}{q}\right)\frac{1}{q}} \sum_{d,d'}^{Q''} \frac{\tau_{D_0 d^2}}{d'^{2+2\rho}} \frac{H_\rho(D_1 d^2)\, H_\rho(D_0 D_1^{-1} d^4)}{K(D_0 d^2)}.
\end{aligned}$$

En transformant de même la dernière somme figurant dans (8), en sommant les progressions et en faisant sortir $\left(\frac{1}{q^{2+2\rho}}\right)^\alpha$ du signe *limite*, on obtient

$$\begin{aligned}
&N(D_0 Q^2, D_1, q) \\
&= \frac{K(D)}{q^{2\alpha}} \frac{\Sigma_{D_1}(Q''^2)}{K(D_0 Q''^2)} \lim_{\rho=0} \left\{ 1 - q^{1+2\rho} + q \frac{\left(q^\rho - \left(\frac{D_1}{q}\right)\frac{1}{q}\right)\left(q^\rho - \left(\frac{D_0 D_1^{-1} Q''^2}{q}\right)\frac{1}{q}\right)}{1-\left(\frac{D_0}{q}\right)\frac{1}{q}} \right\},
\end{aligned}$$

d'où, en particulier,

$$(10) \qquad N(D_0 Q^2, 1, q) = \frac{-2\pi K(D) \log q}{q^\alpha \sqrt{-D}} \frac{1-\left(\frac{D_0}{q}\right)}{1-\left(\frac{D_0}{q}\right)\frac{1}{q}}$$

et, pour $q = 2$,

$$(11) \qquad \prod_{\omega}^{D} \left[\frac{f_1(\omega)}{2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{\alpha+1}} \frac{1-\left(\frac{D_0}{2}\right)}{2-\left(\frac{D_0}{2}\right)}}} \right]^{2\sigma} = 1.$$

On a vu (§ 31) que, si $D \equiv 0 \pmod 4$, $f^{24}(\omega)$ ou $f_1^{24}(\omega)$ ou $f_2^{24}(\omega)$ est invariant de classe, selon que la forme dont ω est racine a ses deux coefficients extrêmes impairs, ou le premier impair et le troisième pair, ou le premier pair et le troisième impair.

Or, quand l'un des coefficients extrêmes est impair, on peut toujours changer la parité de l'autre au moyen de l'une des deux substitutions

$$(\omega, \omega + h), \qquad \left(\omega, h - \frac{1}{\omega}\right),$$

$$h = 3 \qquad (\text{mod } 6),$$

et l'on aura, en posant

$$\omega + h = \omega', \qquad h - \frac{1}{\omega} = \omega'',$$

$$f_1^{24}(\omega) = f^{24}(\omega'), \qquad f_2^{24}(\omega) = f^{24}(\omega'').$$

Ainsi, en remplaçant les formes représentantes par d'autres parallèles, on pourra de la norme de l'invariant f_1^{24} ou f_2^{24} déduire celle de l'invariant f^{24}, et réciproquement.

La formule (10), qui s'applique aussi au cas particulier étudié incidemment au § 34, contient les diverses formules établies par M. Weber d'une manière toute différente, bien que le point de départ y soit toujours, du moins pour le cas $\frac{D}{4} \equiv 1 \pmod 8$, la seconde formule fondamentale de Kronecker.

On pourra maintenant, si q est premier ou puissance d'un nombre premier, exprimer au moyen des quantités $K(D_1)E(D_1)$, $K(D_2)E(D_2)$, comme au paragraphe précédent, les normes relatives à un genre quelconque des fonctions

$$\frac{\eta^{2\sigma}\left(\frac{\omega}{q}\right)}{\eta^{2\sigma}(\omega)}.$$

Ainsi, pour le genre principal, on aura en ajoutant les équations (5) écrites pour toutes les valeurs de $\left(\frac{D_1}{}\right)$ (c'est-à-dire l'unité, les caractères indépendants et toutes leurs combinaisons

2 à 2, 3 à 3, ...)

$$(12)\quad \frac{4\pi g}{\sigma\sqrt{-D}}\sum_{\omega}^{G_p}\log\frac{\eta_1^{2\sigma}\left(\frac{\omega}{q}\right)}{q^{\frac{\sigma}{r}}\eta^{2\sigma}(\omega)}=\lim_{\rho=0}\sum_{D_1}\left[\Sigma_{D_1}(Q^2)-\frac{1}{q}\frac{K(D)}{K\left(\frac{D}{q^2}\right)}\Sigma_{D_1}\left(\frac{Q^2}{q^2}\right)\right],$$

g étant le nombre des genres et la sommation du premier membre s'étendant à toutes les racines représentant le genre principal G_p.

Si chaque genre ne contient qu'une classe, on aura ainsi la fonction $\frac{\eta^\sigma\left(\frac{\omega}{q}\right)}{\eta^\sigma(\omega)}$ elle-même. Si chaque genre contient plus d'une classe, on pourra dans certains cas, en employant des équations de transformation ou d'autres équations particulières convenablement choisies ([1]), éliminer tous les facteurs de la norme sauf un, et, par suite, calculer celui-là.

La seconde conséquence que je veux tirer des équations (3) et (4) est comme la réciproque de la première. En conservant toujours la même spécification de F, les équations (3) et (5) s'écrivent

$$(13)\quad \tau_{D_0 Q^2}\frac{H_\rho(D_1 Q^2)H_\rho(D_2 Q^2)}{K(D_0 Q^2)}=\sum_{d,d'}^{Q}\varepsilon_d d^{-1-2\rho}\frac{\Sigma_{D_1}(d'^2)}{K(D_0 d'^2)},$$

$$(14)\quad \lim_{\rho=0}\left[\Sigma_{D_1}(d'^2)-\frac{1}{q}\frac{K(D_0 d'^2)}{K\left(D_0\frac{d'^2}{q^2}\right)}\lim_{\rho=0}\Sigma_{D_1}\left(\frac{d'^2}{q^2}\right)\right]=N(D_0 d'^2, D_1, q),$$

en supposant que q *divise* d' *et que le caractère* $\left(\frac{D_1}{\ }\right)$ *appartient* à $D_0 d'^2$.

On aurait de même

$$(15)\quad \lim_{\rho=0}\left[\Sigma_{D_1}(d'^2)-\frac{1}{d'}\frac{K(D_0 d'^2)}{K(D_0)}S_{D_1}(1)\right]=N(D_0 d'^2, D_1, d')$$

ou

$$(16)\quad \lim_{\rho=0}\left[\frac{\Sigma_{D_1}(d'^2)}{K(D_0 d'^2)}-\frac{S_{D_1}(1)}{d' K(D_0)}\right]=\frac{N(D_0 d'^2, D_1, d')}{K(D_0 d'^2)}.$$

Cela posé, nous supposerons toujours, pour simplifier, que $\left(\frac{D_1}{\ }\right)$

([1]) Voir, pour quelques exemples, *Elliptische Functionen und algebraische Zahlen*, §§ 97, 98.

n'est pas égal à $+1$ dans toutes les classes, c'est-à-dire $D_1 \neq 1$, et nous distinguerons deux cas :

1° $Q \neq 1$. Supposons d'abord que $\left(\frac{D_1}{-}\right)$ n'appartient pas à D_0. On a alors

$$S_{D_1}(1) = \Sigma_{D_1}(1) = N(D_0 d'^2, D_1, 1) = 0,$$

et l'on tire de (13), (16), en remarquant qu'ici D_1 et Q sont $\neq 1$, donc $D < -4$ et $\tau = 2$,

$$(17) \qquad \frac{2H(D_1Q^2)H(D_2Q^2)}{K(D_0Q^2)} = \sum_{d,d'}^{Q} \varepsilon_d d^{-2} \frac{N(D_0 d'^2, D_1, d')}{K(D_0 d'^2)}.$$

D_1 et D_2 étant de signes contraires, cette relation fournit l'expression d'une unité fondamentale à discriminant positif par des fonctions elliptiques.

Comme on peut varier à l'infini ces expressions, on aura autant de relations entre ces diverses fonctions elliptiques.

Remarquons en passant que (11) donne immédiatement

$$\frac{N(D_0Q^2, D_1, Q)}{K(D_0Q^2)} = 2\sum_{d}^{Q} d^{2} \frac{H(D_1 d'^2)H(D_2 d'^2)}{K(D_0 d'^2)}.$$

Si $\left(\frac{D_1}{-}\right)$ appartient à D_0, $S_{D_1}(1)$ n'est plus nul et l'on aura, d'après (13) et (16),

$$\frac{2H(D_1Q^2)H(D_2Q^2)}{K(D)} = \sum_{d,d'}^{Q} \varepsilon_d d^{-2} \frac{N(D_0 d'^2, D_1, d')}{K(D_0 d'^2)} + \lim_{\rho=0} \sum_{d,d'}^{Q} \varepsilon_d d^{-2-2\rho} \frac{S_{D_1}(1)}{d' K(D_0)}$$

ou

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{2H(D_1Q^2)H(D_2Q^2)}{K(D)} &= \sum_{d,d'}^{Q} \varepsilon_d d^{-2} \frac{N(D_0 d'^2, D_1, d')}{K(D_0 d'^2)} + \frac{2H(D_1)H(D_2Q^2)}{QK(D_0)} \sum_{d}^{Q} \frac{\varepsilon_d}{d} \\ &= \sum_{d,d'}^{Q} \varepsilon_d d^{-2} \frac{N(D_0 d'^2, D_1, d')}{K(D_0 d'^2)} \\ &\quad + \frac{2H(D_1Q^2)H(D_2Q^2)}{QK(D_0)} \frac{\prod\left(1-\frac{1}{p}\right)}{\prod\left(1-\left(\frac{D_1}{p}\right)\frac{1}{p}\right)\prod\left(1-\left(\frac{D_2Q^{-2}}{p}\right)\frac{1}{p}\right)} \end{aligned} \right.$$

(p parcourant les facteurs premiers distincts de Q),

et l'on a encore une expression de $H(D_1Q^2)H(D_2Q^2)$ par les fonctions elliptiques.

On pourrait également employer la formule (9).

2° $Q = 1$.

L'emploi de la formule (9) est ici nécessaire. Elle donne, comme au § 35,

$$(19)\quad \begin{cases} N(D_0, D_1, q) \\ \quad = \left(1 - \left(\frac{D_1}{q}\right)\right)\left(1 - \left(\frac{D_2}{q}\right)\right) S_{D_1}(1) \\ \quad = \left(1 - \left(\frac{D_1}{q}\right)\right)\left(1 - \left(\frac{D_2}{q}\right)\right) \tau H(D_1) H(D_2), \qquad D_1 D_2 = D = D_0 \\ \qquad \text{(le second membre est nul si } D_2 = 1\text{).} \end{cases}$$

Si $D_0 \equiv 0 \pmod 4$, on pourra prendre $q = 2$, et l'on aura, puisque D_2 est pair,

$$(20)\quad \begin{cases} N(D_0, D_1, 2) = \dfrac{4\pi}{\sigma\sqrt{-D}} \log \prod_{\omega}^{D} \left[\dfrac{f_1^{2\sigma}(\omega)}{2^{\frac{\sigma}{2}}}\right]^{\left(\frac{D_1}{A}\right)} = S_{D_1}(1)\left(1 - \left(\frac{D_1}{2}\right)\right) \\ \qquad = \left(1 - \left(\frac{D_1}{2}\right)\right) \tau H(D_1) H(D_2) \\ \qquad \text{(le second membre est nul si } D_1 = 1\text{);} \end{cases}$$

ou, en remplaçant les formes dont ω parcourt les racines par des formes parallèles,

$$(21)\qquad \frac{4\pi}{\sigma\sqrt{-D}} \log \prod_{\omega}^{D} \left[\frac{f^{2\sigma}(\omega)}{2^{\frac{\sigma}{2}}}\right]^{\left(\frac{D_1}{A}\right)} = \left(1 - \left(\frac{D_1}{2}\right)\right) \tau H(D_1) H(D_2).$$

En faisant parcourir à $\left(\frac{D_1}{}\right)$ toutes ses valeurs et en sommant, on pourra parfois réduire le nombre des facteurs $f(\omega)$ qui figurent dans le premier membre en conservant dans le second membre une seule unité fondamentale. C'est ce qui aura lieu, en particulier, quand $\left(\frac{D_1}{2}\right)$ n'est égal à -1 que dans un seul genre et, par conséquent, lorsqu'il n'y a que deux genres.

Enfin, pour le cas $D = D_0$, on peut en toute hypothèse se servir avec Kronecker [1] d'une formule qui résulte immédiatement de

[1] Voir *Monatsberichte*, 25 janvier 1863; *Sitzungsberichte*, p. 779; 1885.

la relation fondamentale

$$\lim_{\rho=0}\left[\frac{-1}{\rho}+\frac{\sqrt{-D}}{2\pi}\Sigma(am^2+bmn+cn^2)^{-1-\rho}\right]$$
$$=-2\Gamma'(1)-\log\frac{\sqrt{-D}}{a}\eta^2(\omega_1)\eta^2(\omega_2),$$

écrite pour toutes les classes, ce qui donne, en multipliant par $\left(\frac{D_1}{A}\right)$ et en sommant, s'il y a plus d'un genre,

$$\frac{\sqrt{-D}}{2\pi}\lim_{\rho=0}\sum_{a,b,c}^{D}\left(\frac{D_1}{A}\right)\sum(am^2+bmn+cn^2)^{-1-\rho}$$
$$=\sum_{a,b,c}^{D}\left(\frac{D_1}{A}\right)\frac{\eta^2(\omega_1)\eta^2(\omega_2)}{a}$$

ou

$$(22)\qquad \frac{4\pi}{\sqrt{-D}}\sum_{a,b,c}\left(\frac{D_1}{A}\right)\log\frac{\eta(\omega_1)\eta(\omega_2)}{\sqrt{a}}=\tau\,H(D_1)H(D_2).$$

Cette formule donne en tout cas l'expression de l'unité fondamentale $E(D_i)$ (D_i étant celui des deux nombres D_1, D_2 qui est positif) par les fonctions elliptiques. Les formules (19) (20) (21) fourniront cette expression quand $\left(\frac{D_1}{2}\right)$ ou $\left(\frac{D_1}{q}\right)$ ou $\left(\frac{D_2}{q}\right)$ est négatif.

Les formules

$$(23)\qquad K(D_0)\log E(D_0)=-\sum_{k=1}^{k=D_0}\left(\frac{D_0}{k}\right)\log\left(1-e^{\frac{2k\pi i}{D_0}}\right)\qquad D_0>0,$$

$$(24)\qquad \begin{cases} K(D)\log E(D)=Q\prod_q\left(1-\left(\frac{D_0}{q}\right)\frac{1}{q}\right)K(D_0)\log E(D_0)\\ (q \text{ parcourant tous les facteurs premiers différents de } Q),\end{cases}$$

fournissent la solution de l'équation de Pell par les fonctions circulaires quel que soit le discriminant. Les formules (22), (24), et lorsqu'on y choisit convenablement q, les formules (19), (20), (21), (24) fournissent également cette solution par les fonctions elliptiques.

La formule (17) peut être considérée comme une généralisation de la formule (22) de Kronecker. Elle fournit à elle seule la solution de l'équation de Pell pour le cas d'un discriminant quel-

conque sans le secours de la relation (24); mais surtout elle introduit pour exprimer cette solution une série nouvelle de fonctions elliptiques.

Il est presque inutile de faire observer que la réunion des formules précédentes fournit une infinité de relations entre des fonctions elliptiques et des fonctions circulaires.

Si l'on se rappelle que

$$\eta(\omega) = e^{\frac{i\pi\omega}{12}} \prod_1^\infty (1 - e^{2ni\pi\omega}),$$

on voit que l'approximation obtenue, en remplaçant $\eta(\omega)$ par $e^{\frac{i\pi\omega}{12}}$, sera souvent suffisante pour donner une idée de la grandeur du second membre de (22). On a alors approximativement

$$\tau\,\mathrm{H}(\mathrm{D}_1)\,\mathrm{H}(\mathrm{D}_2) = \frac{4\pi}{\sqrt{-\mathrm{D}}} \sum_{a,b,c}^{\mathrm{D}} \left(\frac{\mathrm{D}_1}{\mathrm{A}}\right) \log \frac{e^{\frac{i\pi}{12}(\omega_1+\omega_2)}}{\sqrt{a}}$$

ou, puisque $\tau = 2$, en général,

$$\frac{1}{i}\,\mathrm{K}(\mathrm{D}_1)\,\mathrm{K}(\mathrm{D}_2) \log \mathrm{E}(\mathrm{D}_1) \log \mathrm{E}(\mathrm{D}_2) - 2\pi \sum_{a,b,c}^{\mathrm{D}} \left(\frac{\mathrm{D}_1}{\mathrm{A}}\right)\left(\frac{-\pi\sqrt{-\mathrm{D}}}{12a} - \frac{1}{2}\log a\right),$$

et si $\mathrm{D}_1 > 0$, $\mathrm{D}_2 < 0$,

$$(25) \qquad \mathrm{K}(\mathrm{D}_1) \log \mathrm{E}(\mathrm{D}_1) = \frac{-\tau_{\mathrm{D}_2}}{2\mathrm{K}(\mathrm{D}_2)} \sum_{a,b,c}^{\mathrm{D}} \left(\frac{\mathrm{D}_1}{\mathrm{A}}\right)\left(\frac{\pi\sqrt{-\mathrm{D}}}{6a} + \log a\right).$$

§ 40. Applications numériques : $f(\sqrt{-9})$, $f_1(\sqrt{-18})$, $f(\sqrt{-25})$, $f(\sqrt{-45})$, $f_1(\sqrt{-72})$, $f_1(\sqrt{-90})$ E(53).

Nous sommes maintenant en mesure de calculer les invariants f ou f_1 de la classe principale pour les cinq discriminants

$$-4.3^2, \quad -8.3^2, \quad -4.5^2, \quad -4.5.3^2, \quad -8.2^2.3^2,$$

qui échappaient aux formules du § 38. Afin de mettre en évidence le mécanisme des diverses transformations, j'établirai d'abord en détail, pour chacun de ces cinq déterminants, la formule particulière qui donne la valeur de l'invariant correspondant. Je montre-

trerai ensuite comment les formules générales du paragraphe précédent fournissent immédiatement la solution.

J'emploierai les notations suivantes :

$$f_{D_1}(Q^2) = \lim_{\rho=0} \sum_{a,b,c}^{D_0Q^2} \left(\frac{D_1}{A}\right) \sum_{m,n} \left(\frac{Q^2}{m}\right)(am^2+bmn+cn^2)^{-1-\rho},$$

$$\varphi_{D_1}(Q^2) = \lim_{\rho=0} \sum_{a,b,c}^{D_0Q^2} \left(\frac{D_1}{A}\right) \sum_{m,n} (am^2+bmn+cn^2)^{-1-\rho},$$

$$S_\rho(Q^2) = \sum_{a,b,c}^{D_0Q^2} \sum_{m,n} \left(\frac{Q^2}{m}\right)(am^2+bmn+cn^2)^{-1-\rho},$$

$$\Sigma_\rho(Q^2) = \sum_{a,b,c}^{D_0Q^2} \sum_{m,n} (am^2+bmn+cn^2)^{-1-\rho}$$

[a étant premier à Q, $b \equiv 0 \pmod{Q}$, $c \equiv 0 \pmod{Q^2}$]

ainsi que les formules

$$H_\rho(D_0Q^2) = \sum_1^\infty \left(\frac{D_0Q^2}{n}\right)\frac{1}{n^{1+\rho}} = Q\prod_q \left[1-\left(\frac{D_0}{q}\right)\frac{1}{q^{1+\rho}}\right] H_\rho(D_0)$$

(q parcourant tous les facteurs premiers différents de Q),

$$H_0(D) = H(D),$$

$$H(D) = \frac{K(D)}{(\sqrt{D})} \log E(D),$$

$$f_{D_1}(Q^2) = \tau H(D_1Q^2) H(D_2Q^2), \qquad D_1D_2 = D_0Q^2 = D$$

(τ se rapportant au discriminant D),

$$S_\rho(Q^2) = \tau H_\rho(D_1Q^2) H_\rho(D_2Q^2),$$

$$f_{D_1}(Q^2_1) = \sum_{d,d'}^{Q} \frac{\varepsilon_d}{d^2} \frac{K(D)}{K\left(\frac{D}{d^2}\right)} \varphi_{D_1}\left(\frac{Q^2}{d^2}\right),$$

$f_{D_1}(Q^2)$ et $\varphi_{D_1}(Q^2)$ devant être remplacées par 0 quand $\left(\frac{D_1}{\ }\right)$ n'est pas un caractère du discriminant D_0Q^2,

$$S_\rho(Q^2) = \sum_d \frac{\varepsilon_d}{d^{2(1+\rho)}} \frac{K(D)}{K\left(\frac{D}{d^2}\right)} \Sigma_\rho\left(\frac{Q^2}{d^2}\right).$$

1° $D = -4.3^2$. Il n'y a qu'un caractère indépendant $\left(\frac{-3}{\ }\right)$,

et l'on peut écrire

$$f_{-3}(9) = \varphi_{-3}(9) = \tau H(-3.9)H(12.9).$$

Les deux classes représentantes seront

$$(1, 0, 9) \backsim (1, -2, 10), \qquad (5, 8, 5) \backsim (5, -2, 2).$$

Appliquons la formule

$$\frac{4\pi}{\sqrt{-D}} \log \frac{f(\omega_1)f(\omega_2)}{\sqrt{2}}$$
$$= \lim_{\rho=0} \sum (am^2 + bmn + cn^2)^{-1-\rho}$$
$$- \lim_{\rho=0} \sum \left[2am^2 + (b-2a)mn + \frac{a-b+c}{2} n^2\right]^{-1-\rho}.$$

On aura successivement, pour les deux classes représentantes, en remarquant que pour $(1, 0, 9)$ $\omega_1 = \omega_2$, que pour $(5, 8, 5)$ $\omega_2 = \frac{-1}{\omega_1}$ et que, par conséquent, dans les deux cas $f(\omega_2) = f(\omega_1)$,

$$\frac{4\pi}{3} \log \frac{f(\sqrt{-9})}{\sqrt[4]{2}} = \lim_{\rho=0} \Sigma(m^2 + 9n^2)^{-1-\rho} - \lim_{\rho=0} \Sigma(2m^2 - 2mn + 5n^2)^{-1-\rho},$$

$$\frac{4\pi}{3} \log \frac{f\left(\frac{4+\sqrt{-9}}{5}\right)}{\sqrt[4]{2}}$$
$$= \lim_{\rho=0} \Sigma(5m^2 + 8mn + 5n^2)^{-1-\rho} - \lim_{\rho=0} \Sigma(10m^2 - 2mn + 1)^{-1-\rho}.$$

En ajoutant les deux formules multipliées par $\left(\frac{-3}{1}\right)$ et $\left(\frac{-3}{5}\right)$, puis en les ajoutant simplement, on obtient

$$\frac{4\pi}{3}\left[\log \frac{f(\sqrt{-9})}{\sqrt[4]{2}} - \log \frac{f\left(\frac{4+\sqrt{-9}}{5}\right)}{\sqrt[4]{2}}\right]$$
$$= 2\varphi_{-3}(9) = 2\tau H(-3.9)H(12.9),$$

$$\frac{4\pi}{3}\left[\log \frac{f(\sqrt{-9})}{\sqrt[4]{2}} + \log \frac{f\left(\frac{4+\sqrt{-9}}{5}\right)}{\sqrt[4]{2}}\right] = 0.$$

Enfin, l'addition de ces deux équations donne

$$\frac{4\pi}{3}\log\frac{f(\sqrt{-9})}{\sqrt[4]{2}} = \tau\,H(-3.9)\,H(12.9) = 2\,H(-3)\,H(12)$$
$$= 2\frac{K(-3)}{\sqrt{3}}\,\frac{\pi}{3}\,\frac{K(12)}{\sqrt{12}}\log\frac{T+U\sqrt{12}}{2}.$$

On trouve dans les Tables de Gauss

$$K(-3)=1,\qquad K(12)=2,$$

et par celles de Legendre (¹)

$$T=4,\qquad U=1.$$

Donc

$$6\log\frac{f(\sqrt{-9})}{\sqrt[4]{2}} = \log\frac{4+\sqrt{12}}{2},$$
$$f^{6}(\sqrt{-9}) = \sqrt{2}(1+\sqrt{3})^{2}.$$

C'est bien la valeur trouvée par M. Weber à l'aide des équations modulaires de Schlaefli (²).

La formule (9) du § 39 donne immédiatement

$$\frac{8\pi g}{\sqrt{-D}}\log\frac{f(\sqrt{-9})}{\sqrt[4]{2}} = \left(1-\left(\frac{-3}{2}\right)\right)2\,H(-3.3^{2})\,H(4.3^{-1}.3^{2}).$$

2° $D=-8.3^2$. Le seul caractère indépendant est $\left(\frac{-3}{\quad}\right)$, et l'on a

$$f_{-3}(9) = \varphi_{-3}(9) = \tau\,H(-3.9)\,H(24.9).$$

Les deux formes représentantes seront

$$(1,0,18),\quad (2,0,9).$$

En employant la formule

$$\frac{4\pi}{\sqrt{-D}}\log\frac{f_1(\omega_1)\,f_1(\omega_2)}{\sqrt{2}}$$
$$= \lim_{\rho=0}\Sigma(am^2+bmn+cn^2)^{-1-\rho} - \lim_{\rho=0}\Sigma\left(2am^2+bmn+\frac{c}{2}n^2\right)^{-1-\rho},$$

(¹) *Théorie des nombres*, 3ᵉ édition, Table X (à la fin du premier volume).

(²) *Elliptische Functionen und algebraische Zahlen*, § 97.

on obtient

$$\frac{4\pi}{3\sqrt{2}}\log\frac{f_1(\sqrt{-18})}{\sqrt[4]{2}} = \lim_{\rho=0}\Sigma(\ m^2+18n^2)^{-1-\rho} - \lim_{\rho=0}\Sigma(\ 2m^2+9n^2)^{-1-\rho},$$

$$\frac{4\pi}{3\sqrt{2}}\log\frac{f_1(\sqrt{-38})}{\sqrt[4]{2}} = \lim_{\rho=0}\Sigma(9m^2+\ 2n^2)^{-1-\rho} - \lim_{\rho=0}\Sigma(18m^2+\ n^2)^{-1-\rho}$$

et, comme tout à l'heure,

$$\frac{8\pi}{3\sqrt{2}}\log\frac{f_1(\sqrt{-18})}{\sqrt[4]{2}} = 2\,\mathrm{H}(-3)\,\mathrm{H}(24) = \frac{2\pi\,\mathrm{K}(24)}{9\sqrt{2}}\log\frac{\mathrm{T}+\mathrm{U}\sqrt{24}}{2};$$

or

$$\mathrm{K}(24)=2,\qquad \mathrm{T}=19,\qquad \mathrm{U}=2;$$

donc

$$f_1^6(\sqrt{-18}) = 2^{\frac{3}{2}}(5+2\sqrt{6}) = 2^{\frac{3}{2}}(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = \sqrt{2}(2+\sqrt{6})^2,$$

$$f_1^3(\sqrt{-18}) = \sqrt[4]{2}(2+\sqrt{6}).$$

C'est encore la formule trouvée par M. Weber, au moyen des équations de Schlaefli [1].

La formule (9) du § 39 donne immédiatement

$$\frac{8\pi g}{\sqrt{-\mathrm{D}}}\log\frac{f_1(\sqrt{-18})}{\sqrt[4]{2}} = 2\,\mathrm{H}(-3.3^2)\,\mathrm{H}(8.3^{-1}.3^2).$$

3° $\mathrm{D}=-4.5^2$. Le seul caractère indépendant est $\left(\frac{5}{-}\right)$, et l'on a

$$f_5(25) = \varphi_5(25) = \tau\,\mathrm{H}(5.25)\,\mathrm{H}(-20.25) = \tau\,\mathrm{H}(5)\,\mathrm{H}(-20).$$

Les formes représentantes seront

$$(1, 0, 25) \backsim (1, -2, 26),\qquad (2, 2, 13) \backsim (13, 24, 13).$$

Par la même formule que dans le premier exemple, on obtient

$$\frac{4\pi}{5}\log\frac{f(\sqrt{-25})}{\sqrt[4]{2}} = \lim_{\rho=0}\Sigma(m^2+25n^2)^{-1-\rho} - \lim_{\rho=0}\Sigma(2m^2-2mn+13n^2)^{-1-\rho}.$$

$$\frac{4\pi}{5}\log\frac{f\left(\frac{-12+\sqrt{-25}}{13}\right)}{\sqrt[4]{2}}$$

$$= \lim_{\rho=0}\Sigma(13m^2+50mn+13n^2)^{-1-\rho} - \lim_{\rho=0}\Sigma(26m^2-2mn+n^2)^{-1-\rho},$$

---

[1] *Elliptische Functionen und algebraische Zahlen*, p. 372.

puis

$$\frac{8\pi}{5}\log\frac{f(\sqrt{-25})}{\sqrt[4]{2}} = 4\,\mathrm{H}(5)\,\mathrm{H}(-20) = \frac{2}{5}\,\mathrm{K}(5)\,\mathrm{K}(-20)\log\frac{\mathrm{T}+\mathrm{U}\sqrt{5}}{2}.$$

Or

$$\mathrm{K}(5)=1,\qquad \mathrm{K}(-20)=2,\qquad \mathrm{T}=3,\qquad \mathrm{U}=1.$$

Donc

$$\sqrt[4]{8}\,f(\sqrt{-25}) = 1+\sqrt{5}\ (^1).$$

La formule (9) du § 39 donne de suite

$$\frac{8\pi g}{\sqrt{-\mathrm{D}}}\log\frac{f(\sqrt{-25})}{\sqrt[4]{2}} = 2\mathrm{H}(5.5^2)\,\mathrm{H}(-4.5^{-1}.5^2).$$

4° $\mathrm{D}=-4.5.3^2$. Les caractères indépendants sont $\left(\frac{5}{-}\right)$, $\left(\frac{-3}{-}\right)$, et l'on a

$$\begin{aligned}
f_5(9) &= \varphi_5(9) - \frac{\mathrm{K}(-4.5.3^2)}{\mathrm{K}(-5.3^2)}\,\frac{1}{9}\,\varphi(1) = \varphi_5(9) - \frac{2}{9}\,\varphi_5(1)\\
&= 2\,\mathrm{H}(5.9)\,\mathrm{H}(-36.9),\\
f_5(1) &= \varphi_5(1),\\
f_{-3}(9) &= \varphi_{-3}(9) = 2\,\mathrm{H}(-3.9)\,\mathrm{H}(60.9),\\
f_{-15}(9) &= \varphi_{-15}(9) = 2\,\mathrm{H}(-15.9)\,\mathrm{H}(12.9),\\
\mathrm{S}_\rho(9) &= \Sigma_\rho(9) - \frac{2}{9^{1+\rho}}\,\Sigma_\rho(1).
\end{aligned}$$

Les formes représentantes sont

$$\begin{array}{ll}
(1,\ 0,\ 45) \backsim (1,\ -2,\ 46), & (5,\ 0,\ 9) \backsim (5,\ -10,\ 14),\\
(23,\ 44,\ 23) \backsim (23,\ -2,\ 2), & (7,\ 4,\ 7) \backsim (7,\ -10,\ 10).
\end{array}$$

La même équation que dans le premier exemple donne

$$\begin{aligned}
&\frac{4\pi}{3\sqrt{5}}\log\frac{f(\sqrt{-45})}{\sqrt[4]{2}}\\
&\quad= \lim_{\rho=0}\Sigma(\ m^2+45n^2)^{-1-\rho} - \lim_{\rho=0}\Sigma(\ 2m^2-\ 2mn+23n^2)^{-1-\rho},\\
&\frac{4\pi}{3\sqrt{5}}\log\frac{f\left(\frac{\sqrt{-45}}{5}\right)}{\sqrt[4]{2}}\\
&\quad= \lim_{\rho=0}\Sigma(5m^2+\ 9n^2)^{-1-\rho} - \lim_{\rho=0}\Sigma(10m^2-10mn+\ 7n^2)^{-1-\rho},
\end{aligned}$$

---

(1) *Elliptische Functionen und algebraische Zahlen*, § 97.

$$\frac{4\pi}{3\sqrt{5}}\log\frac{f\left(\frac{-22+\sqrt{-45}}{23}\right)}{\sqrt[4]{2}}$$
$$=\lim_{\rho=0}\Sigma(23m^2 = 44mn + 23n^2)^{-1-\rho} - \lim_{\rho=0}\Sigma(46m^2 - 2mn + n^2)^{-1-\rho},$$

$$\frac{4\pi}{3\sqrt{5}}\log\frac{f\left(\frac{-7+\sqrt{-45}}{7}\right)}{\sqrt[4]{2}}$$
$$=\lim_{\rho=0}\Sigma(7m^2 + 4mn + 7n^2)^{-1-\rho} - \lim_{\rho=0}\Sigma(14m^2 - 10mn + 5n^2)^{-1-\rho}.$$

Multiplions par $\left(\frac{-3}{1}\right)$, $\left(\frac{-3}{5}\right)$, $\left(\frac{-3}{23}\right)$, $\left(\frac{-3}{7}\right)$ et ajoutons; il viendra, en appelant pour abréger les premiers membres des équations précédentes L_1, L_2, L_3, L_4,

$$L_1 - L_2 - L_3 + L_4 = 2\varphi_{-3}(9).$$

Multiplions par $\left(\frac{5}{1}\right)$, $\left(\frac{5}{9}\right)$, $\left(\frac{5}{23}\right)$, $\left(\frac{5}{7}\right)$ et ajoutons :

$$L_1 + L_2 - L_3 - L_4 = 2\varphi_5(9).$$

Multiplions par $\left(\frac{-15}{1}\right)$, $\left(\frac{-15}{1}\right)$, $\left(\frac{-15}{23}\right)$, $\left(\frac{-15}{7}\right)$ et ajoutons :

$$L_1 - L_2 + L_3 - L_4 = 0.$$

Enfin ajoutons simplement :

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = \lim_{\rho=0}[\Sigma_\rho(9) - \Sigma_\rho(9)] = 0.$$

La somme des quatre égalités précédentes donne alors

$$\begin{aligned}\frac{4\pi}{3\sqrt{5}}\log\frac{f(\sqrt{-45})}{\sqrt[4]{2}} &= 2\varphi_{-3}(9) + 2\varphi_5(9)\\ &= 2f_{-3}(9) + 2f_5(9) + \frac{4}{9}f_5(1)\\ &= 4\,\mathrm{H}(-3.9)\,\mathrm{H}(60.9)\\ &\quad + 4\,\mathrm{H}(5.9)\,\mathrm{H}(-36.9) + \frac{8}{9}\mathrm{H}(5)\,\mathrm{H}(-4);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{4\pi}{3\sqrt{5}}\log\frac{f(\sqrt{-45})}{\sqrt[4]{2}} &= \mathrm{H}(-3)\,\mathrm{H}(60) + \frac{16}{9}\mathrm{H}(5)\,\mathrm{H}(-4) + \frac{2}{9}\mathrm{H}(5)\mathrm{H}(-4)\\ &= \frac{\mathrm{K}(-3)}{\sqrt{3}}\,\frac{\mathrm{K}(60)}{\sqrt{60}}\,\frac{\pi}{3}\log\frac{\mathrm{T}+\mathrm{U}\sqrt{60}}{2}\\ &\quad + 2\,\frac{\mathrm{K}(5)}{\sqrt{5}}\,\frac{\mathrm{K}(-4)}{2}\,\frac{\pi}{2}\log\frac{\mathrm{T}+\mathrm{U}\sqrt{5}}{2};\end{aligned}$$

or on a

$$K(-3) = K(-4) = 1, \quad K(5) = 1, \quad K(60) = 4,$$

$$\frac{T+U\sqrt{60}}{2} = \frac{8+\sqrt{60}}{2} = 4+\sqrt{15}, \quad \frac{T+U\sqrt{5}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2.$$

Donc

$$f^4(\sqrt{-45}) = 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3(4+\sqrt{15})^{\frac{2}{3}}$$

$$f^{12}(\sqrt{-45}) = 8(2+\sqrt{5})^3(4+\sqrt{15})^2$$
$$= 2(2+\sqrt{5})^3(\sqrt{3}+\sqrt{5})^5 \quad (^1).$$

La formule (9) du § 39 donne immédiatement

$$\frac{8\pi g}{\sqrt{-D}}\log\frac{f(\sqrt{-45})}{\sqrt[4]{2}} = \left(1-\left(\frac{-3}{2}\right)\right)2\,H(-3.3^2)\,H(4.5.3^{-1}.3^2)$$
$$+\left(1-\left(\frac{5}{2}\right)\right)\left[\frac{2}{3}H(5)H(-4.5.5^{-1})\left(1-\left(\frac{-4.5}{3}\right)\frac{1}{3}\right)\right.$$
$$\left.+2H(5.3^2)H(-4.5.5^{-1}.3^2)\right]$$
$$= 4H(-3)H(60)+\frac{4}{9}H(5)H(-4)+\frac{32}{9}H(5)H(-4).$$

5° $D = -8.2^2.3^2$. Les caractères indépendants sont $\left(\frac{8}{-}\right)$, $\left(\frac{-3}{}\right)$ et l'on a (²)

$$f_8(36) = \varphi_8(36) - \frac{2}{9}\varphi_8(4),$$
$$f_8(4) = \varphi_8(4),$$
$$f_{-3}(36) = \varphi_{-3}(36) - \frac{2}{4}\varphi_{-3}(9),$$
$$f_{-3}(9) = \varphi_{-3}(9),$$
$$f_{-24}(36) = \varphi_{-24}(36),$$
$$S_\rho(36) = \Sigma_\rho(36) - \frac{2}{4^{1+\rho}}\Sigma_\rho(9) - \frac{2}{9^{1+\rho}}\Sigma_\rho(4) + \frac{4}{36^{1+\rho}}\Sigma_\rho(1),$$
$$S_\rho(9) = \Sigma_\rho(9) - \frac{2}{9^{1+\rho}}\Sigma_\rho(1),$$
$$S_\rho(4) = \Sigma_\rho(4) - \frac{2}{4^{1+\rho}}\Sigma_\rho(1),$$
$$f_{D_1}(1) = \varphi_{D_1}(1),$$
$$S_\rho(1) = \Sigma_\rho(1).$$

(¹) C'est le résultat obtenu par M. Weber au moyen des équations modulaires irrationnelles (*Acta*, t. XI, p. 379).

(²) Si l'on veut, par manière de vérification, établir en détail toutes les formules

On en tire

$$\begin{aligned}
\varphi_{-3}(36) &= f_{-3}(36) + \frac{1}{2} f_{-3}(9),\\
\varphi_{-3}(9) &= f_{-3}(9),\\
\varphi_{8}(36) &= f_{8}(36) + \frac{2}{9} f_{8}(4),\\
\varphi_{8}(4) &= f_{8}(4),\\
\Sigma_\rho(36) &= S_\rho(36) + \frac{2}{4^{1+\rho}} S_\rho(9) + \frac{2}{9^{1+\rho}} S_\rho(4) + \frac{4}{36^{1+\rho}} S_\rho(1),\\
\Sigma_\rho(9) &= S_\rho(9) + \frac{2}{9^{1+\rho}} S_\rho(1),\\
\Sigma_\rho(4) &= S_\rho(4) + \frac{2}{4^{1+\rho}} S_\rho(1),
\end{aligned}$$

formules que l'on aurait pu écrire de suite d'après la théorie des quantités ε_n.

Partons alors de la formule

$$\frac{8\pi}{\sqrt{-D}} \log \frac{f_1(\omega)}{\sqrt{2}}$$
$$= \lim_{\rho=0} \Sigma(am^2 + bmn + cn^2)^{-1-\rho} - \frac{1}{2} \lim_{\rho=0} \Sigma\left(am^2 + \frac{b}{2} mn + \frac{c}{4} n^2\right)^{-1-\rho},$$

---

dont les suivantes sont des combinaisons linéaires, il faut observer que, pour le discriminant $D = -8.2^2 3^2$, il y a quatre classes représentables par les formes suivantes

$$(a)\quad \begin{cases}
(1,\ 0,\ 72),\\
(8,\ 0,\ 9) \backsim (8,\ 16,\ 17) \backsim (17,\ 16,\ 8) \backsim (17,\ 4.72,\ 17.72),\\
(4,\ 4,\ 19) \backsim (19,\ 34,\ 19) \backsim (19,\ 20.72,\ 379.72),\\
(8,\ 8,\ 11) \backsim (11,\ 14,\ 11) \backsim (11,\ 16.72,\ 419.72),
\end{cases}$$

que pour le discriminant $\frac{D}{4} = -8.3^2 = -72$, il y a également deux classes représentables par les formes

$$(1,\ 0,\ 18) \backsim (19,\ 20.36,\ 379.18),$$
$$(17,\ 4.36,\ 17.18) \backsim (11,\ 16.36,\ 419.18),$$

que pour le discriminant $\frac{D}{9} = -8.2^2 = -32$, il y a également deux classes représentables par les formes

$$(1,\ 0,\ 8) \backsim (17,\ 4.24,\ 17.8),$$
$$(19,\ 20.24,\ 379.8) \backsim (11,\ 16.24,\ 419.8),$$

enfin que pour le discriminant $\frac{D}{36} = -8$, il n'y a qu'une classe représentable par

qui donne

$$\frac{8\pi}{\sqrt{-D}}\sum_{\omega}^{D}\left(\frac{D_1}{A}\right)\log\frac{f_1(\omega)}{\sqrt{2}}$$

$$=\lim_{\rho=0}\left\{\sum_{a,b,c}^{D}\left(\frac{D_1}{A}\right)\Sigma(am^2+bmn+cn^2)^{-1-\rho}-\sum_{a,\frac{b}{2},\frac{c}{4}}^{\frac{D}{4}}\left(\frac{D_1}{A}\right)\Sigma\left(am^2+\frac{b}{2}mn+\frac{c}{4}n^2\right)^{-1-\rho}\right\},$$

ω parcourant les valeurs définies dans les paragraphes précédents. En ajoutant les formules correspondant aux diverses valeurs de $D_1 = 1, 8, -3, -24$, on obtient

$$\frac{8\pi g}{\sqrt{-D}}\log\frac{f_1\left(\sqrt{\frac{D}{4}}\right)}{\sqrt{2}}=\lim_{\rho=0}\left\{\Sigma_\rho(Q^2)-\Sigma_\rho\left(\frac{Q^2}{4}\right)\right\}+\sum_{D_1}\left[\varphi_{D_1}(Q^2)-\varphi_{D_1}\left(\frac{Q^2}{4}\right)\right],$$

---

les formes

$$(1,\ 0,\ 2)\backsim(17,\ 4.12,\ 17,\ 2)\backsim(19,\ 20.12,\ 379.2)\backsim(11,\ 16.12,\ 419.2).$$

On aura, par exemple, pour la troisième classe (a),

$$\begin{aligned}\sum\left(\frac{36}{m}\right)&(19m^2+20.72\,mn+379.72\,n^2)^{-1-\rho}\\ =\ &\Sigma(19m^2+20.72\,mn+379.72\,n^2)^{-1-\rho}\\ &-\frac{1}{4^{1+\rho}}\Sigma(19m^2+20.36\,mn+379.18\,n^2)^{-1-\rho}\\ &-\frac{1}{9^{1+\rho}}\Sigma(19m^2+20.24\,mn+379.8\,n^2)^{-1-\rho}\\ &+\frac{1}{36^{1+\rho}}\Sigma(19m^2+20.12\,mn+379.2\,n^2)^{-1-\rho}\end{aligned}$$

et

$$\frac{\pi}{3\sqrt{2}}\log\frac{f_1\left(\frac{-2+\sqrt{-72}}{19}\right)f_1\left(\frac{+2+\sqrt{-72}}{19}\right)}{2}$$
$$=\lim_{\rho=0}\left[\Sigma(19m^2+4mn+4n^2)^{-1-\rho}-\frac{1}{2}\Sigma(19m^2+2mn+n^2)^{-1-\rho}\right].$$

$\frac{-2+\sqrt{-72}}{19}=\omega_1$ et $-\frac{2+\sqrt{-72}}{19}=-\omega_2$ sont les racines de

$$(19,\ 4,\ 4)\backsim(19,\ 4-2.19,\ 4-4+19)\ (19,\ -34,\ 19)\backsim(19,\ 34,\ 19);$$

les racines de $(19, 34, 19)$ sont

$$\omega'_1=\omega_1+1,\qquad -\omega'_2=-\omega_2+1,\qquad \omega'_2=\frac{-1}{\omega'_1};$$

ce sont ces racines qui figureront parmi les racines représentantes.

en convenant de remplacer $\varphi_{D_1}\left(\frac{Q^2}{4}\right)$ par o quand D_1 n'appartient pas à $\frac{D_0 Q^2}{4}$.

On aura donc ici, puisque $g=4$, $\frac{-D}{4}=72$, $Q^2=36$,

$$\frac{8\pi}{3\sqrt{2}}\log\frac{f_1(\sqrt{-72})}{\sqrt{2}}$$
$$=\lim_{\rho=0}[\Sigma_\rho(36)-\Sigma_\rho(9)]+\varphi_8(36)+\varphi_{-3}(36)-\varphi_{-3}(9)+\varphi_{-24}(36)$$

ou

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{8\pi}{3\sqrt{2}}\log\frac{f_1(\sqrt{-72})}{\sqrt{2}}&=\lim_{\rho=0}\Bigg[S_\rho(36)-S_\rho(9)\left(1-\frac{2}{4^{1+\rho}}\right)\\&\qquad+\frac{2}{9^{1+\rho}}S_\rho(4)+2S_\rho(1)\left(\frac{2}{36^{1+\rho}}-\frac{1}{9^{1+\rho}}\right)\Bigg]\\&\qquad+f_8(36)+\frac{2}{9}f_8(4)\\&\qquad+f_{-3}(36)-\frac{1}{2}f_{-3}(9)+f_{-24}(36).\end{aligned}\right.$$

La partie figurant sous le signe *limite* est égale à

$$\begin{aligned}2\Bigg\{&H_\rho(1.36\,H_\rho(D.36)-H_\rho(1.9)\,H_\rho\left(\frac{D}{4}.9\right)\left(1-\frac{2}{4^{1+\rho}}\right)\\&+\frac{2}{9^{1+\rho}}H_\rho(1.4)\,H_\rho\left(\frac{D}{9}.4\right)\\&+2H_\rho(1)\,H_\rho\left(\frac{D}{36}.1\right)\left(\frac{2}{36^{1+\rho}}-\frac{1}{9^{1+\rho}}\right)\Bigg\}\\=2H_\rho(1)H_\rho(-8)\Bigg\{&\left(1-\frac{1}{2^{1+\rho}}\right)\left(1-\frac{1}{3^{1+\rho}}\right)\left(1-\left(\frac{3}{8}\right)\frac{1}{3^{1+\rho}}\right)\\&-\left(1-\left(\frac{-2}{3}\right)\frac{1}{3^{1+\rho}}\right)\left(1-\frac{1}{3^{1+\rho}}\right)\left(1-\frac{2}{4^{1+\rho}}\right)\\&+\frac{2}{9^{1+\rho}}\left(1-\frac{1}{2^{1+\rho}}\right)+2\left(\frac{2}{36^{1+\rho}}-\frac{1}{9^{1+\rho}}\right)\Bigg\}.\end{aligned}$$

En développant suivant les puissances de ρ, on trouve, comme il le faut, que le terme indépendant de ρ est nul, et puisque

$$\lim_{\rho=0}\rho\,H_\rho(1)=1,\qquad\lim_{\rho=0}H_\rho(-8)=H(-8),$$

on obtient, pour la limite cherchée,

$$-\frac{2}{3}H(-8)\log 2 = -\frac{2\pi K(-8)}{3\sqrt{8}}\log 2 = \frac{-\pi}{3\sqrt{2}}\log 2.$$

La seconde partie du second membre de (1) est

$$\begin{aligned}2\Big\{&H(8.36)H(-2^2.3^2.36) + \frac{2}{9}H(8.4)H(-2^2.4)\\ &+ H(-3.36)H(8.2^2.3.36) - \frac{1}{2}H(-3.9)H(8.3.9)\\ &+ H(-24.36)H(2^2.3.36)\Big\}\end{aligned}$$

$$= 2\left\{2H(8)H(-4) + H(-3)H(24) + H(-24)H(12)\right\}$$

$$\begin{aligned}= 2\pi\Big\{&\frac{K(8)K(-4)}{\sqrt{8}\sqrt{4}}\log\frac{6+2\sqrt{8}}{2} + \frac{1}{3}\frac{K(-3)K(24)}{\sqrt{3}\sqrt{24}}\log\frac{10+2\sqrt{24}}{2}\\ &+ \frac{K(12)K(-24)}{\sqrt{12}\sqrt{24}}\log\frac{4+\sqrt{12}}{2}\Big\},\end{aligned}$$

et comme

$$K(8) = K(-3) = K(-4) = 1, \qquad K(12) = K(24) = K(-24) = 2,$$

cette quantité prend la forme

$$\frac{\pi}{9\sqrt{2}}\log\frac{1}{2^2}(1+\sqrt{2})^9(2+\sqrt{6})^4(2+\sqrt{3})^6.$$

Donc

$$\begin{aligned}&\frac{8\pi}{3\sqrt{2}}\log\frac{f_1(\sqrt{-72})}{\sqrt{2}}\\ &\quad = \frac{-3\pi}{9\sqrt{2}}\log 2 + \frac{\pi}{9\sqrt{2}}\log 2^{-2}(1+\sqrt{2})^9(2+\sqrt{6})^4(2+\sqrt{3})^6,\\ &f_1(\sqrt{-72}) = 2^7(1+\sqrt{2})^9(2+\sqrt{3})^6(2+\sqrt{6})^4\\ &\qquad\qquad = 2(1+\sqrt{2})^9(1+\sqrt{3})^{12}(2+\sqrt{6})^4 \quad (^1).\end{aligned}$$

---

(1) Cette valeur est celle trouvée par M. Weber (*Acta*, t. XI, p. 389); elle est reproduite dans les *Mathematische Annalen*, t. XXXIII, p. 408, et dans *Elliptische Functionen und algebraische Zahlen*, p. 502, mais avec 2^4 au lieu de 2^7; c'est évidemment une faute d'impression, comme le montre la vérification par le calcul logarithmique.

La formule (10) du § 39 donne d'abord

$$A(D, 1, 2) = \frac{-\pi K(D)}{\sqrt{-D}} \log 2 = \frac{-\pi \log 2}{3\sqrt{2}},$$

puis

$$\begin{aligned}
&\frac{8\pi g}{\sqrt{-D}} \log \frac{f_1(\sqrt{-72})}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{-\pi \log 2}{3\sqrt{2}} + 2\Big[\frac{1}{2} H(-3.3^2)\, H(8.3^{-1}3^2) \\
&\qquad + H(-3.6^2)\, H(8.3^{-1}6^2) - H(-3.3^2)\, H(8.3^{-1}3^2)\Big] \\
&\qquad + 2\left[\frac{1}{3} H(8.2^2) H(-4)\left(1 - \left(\frac{-8}{3}\right)\frac{1}{3}\right) + H(8.6^2) H(-6^2)\right] \\
&\qquad + 2H(-24.6^2)\, H(3^{-1}6^2) \\
&= \frac{-\pi \log 2}{3\sqrt{2}} + 2H(-3)\, H(24) + 4H(8)\, H(-4) + 2H(-24)\, H(12).
\end{aligned}$$

On peut encore retrouver autrement cette expression en partant de la formule

$$2 f_1^8(2\omega) = f_1(\omega)^4 \left[f_1(\omega)^{12} + \sqrt{f_1^{24}(\omega) + 64}\right],$$

déjà employée au § 38. On a trouvé en effet

$$f_1^3 \sqrt{-18}) = \sqrt[4]{2}(2 + \sqrt{6})^2,$$

donc

$$\begin{aligned}
8 f_1^{24}(\sqrt{-72}) &= 2(2+\sqrt{6})^4\left[2(2+\sqrt{6})^4 + 8\sqrt{4802 + 1960\sqrt{6}}\right]^3, \\
f_1^{24}(\sqrt{-72}) &= 2(2+\sqrt{6})^4\left[2(2+\sqrt{6})^4 + 8(35\sqrt{2} + 28\sqrt{3})\right]^3 \\
&= 2(2+\sqrt{6})^4 (1+\sqrt{2})^9 (1+\sqrt{3})^{12}.
\end{aligned}$$

Considérons un discriminant donnant lieu à plusieurs classes par genre,

$$D = -8.5.3^2,$$

dont la classification est, d'après les notations de Gauss, IV, 2. Les caractères indépendants sont $\left(\frac{-3}{}\right)$, $\left(\frac{5}{}\right)$ et les quatre genres seront représentés par les quatre couples de formes

$$\begin{gathered}
(1, 0, 90), \quad (9, 0, 10), \\
(45, 0, 2), \quad (5, 0, 18), \\
(7, \pm 2, 13), \\
(9, \pm 6, 11).
\end{gathered}$$

La formule (9) du § 39 donne

$$\frac{4\pi}{3\sqrt{10}}\log\frac{f_1^3(\sqrt{-90})f_1^3\left(\frac{1}{3}\sqrt{-10}\right)}{\sqrt{2}} = H(-3)\,H(120)+\frac{4}{3}H(5)\,H(-8),$$

$$K(120)=4,\qquad K(-3)=K(-8)=K(5)=1,$$

$$E(120)=\frac{22+2\sqrt{120}}{2}=(\sqrt{5}+\sqrt{6})^2,\qquad E(5)=\frac{3+\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2,$$

$$f_1^3(\sqrt{-90})f_1^3\left(\frac{1}{3}\sqrt{-10}\right)=2\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{6})(2+\sqrt{5}).$$

Écrivons maintenant l'équation relative à la transformation du troisième ordre

$$\left(\frac{u_1}{v_1}\right)^6-\left(\frac{v_1}{u_1}\right)^6+(u_1v_1)^3+\frac{8}{(u_1v_1)^3}=0,$$

$$u_1=f_1(\omega),\qquad v_1=\left(\frac{2}{a}\right)f_1\left(\frac{c+d\omega}{a}\right),$$

$$ad=3,\qquad c\equiv 0\pmod{16}\ (^1).$$

Elle devient, si l'on pose $u_1^3=\alpha$, $v_1^3=x$,

$$x^4-\alpha^3x^3-8\alpha^2-\alpha^4=0.$$

Les quatre racines sont, pour $\omega=\sqrt{-10}$,

$$f_1^3(\sqrt{-90}),\quad -f_1^3\left(\frac{1}{3}\sqrt{-10}\right),$$

$$-f_1^3\left(\frac{16+\sqrt{-10}}{3}\right),\quad -f_1^3\left(\frac{-16+\sqrt{-10}}{3}\right),$$

et, -40 étant un des 65 discriminants singuliers, on obtient sans difficulté

$$\alpha^2=f_1^6(\sqrt{-10})=2\sqrt{2}(2+\sqrt{5}).$$

Il est facile de séparer dans l'équation précédente, par l'adjonction de $\sqrt{6}$, le facteur quadratique relatif aux deux premières racines qui appartiennent au même genre. On sait *a priori* que cela est possible ([2]). Identifions pour cela le premier membre avec

$$(x^2+mx+n)(x^2+px+q),$$

([1]) *Elliptische Functionen*, § 76.
([2]) *Elliptische Functionen*, § 106.

en supposant que

$$-n = f_1^3(\sqrt{-90})f_1^3\left(\frac{1}{3}\sqrt{-10}\right) = 2\sqrt{2}(2+\sqrt{5})(\sqrt{5}+\sqrt{6}) = \alpha^2(\sqrt{5}+\sqrt{6})$$

On aura

$$m+p = -\alpha^3, \qquad mq+pn = -8\alpha, \qquad nq = -\alpha^4,$$

d'où, par élimination de p, q,

$$m = \frac{n\alpha(8-n\alpha^2)}{\alpha^4+n^2},$$

$f_1^3(\sqrt{-90})$ et $-f_1^3\left(\frac{1}{3}\sqrt{-10}\right)$ sont les racines de

$$x^2+mx+n=0.$$

Terminons par un exemple de la solution de l'équation de Pell par les fonctions elliptiques. Calculons E(53) que ne donnent pas les Tables de Legendre, et prenons pour cela le discriminant $D = -4.53$ pour lequel il y a deux genres et six classes, celles du genre principal étant représentables par

$$(1,\ 0,\ 63),\quad (9,\ \pm 2,\ 6) \backsim (9,\ \pm 20,\ 17),$$

et celles du second genre par

$$(27,\ 2,\ 2),\quad (3,\ \pm 2,\ 18).$$

La formule (20) du § 39, plus avantageuse que la formule (22) de Kronecker, donne

$$\frac{4\pi}{\sqrt{53}}\sum_{\omega}^{-4.53}\frac{f^2(\omega)}{\sqrt{2}} = 4\,\mathrm{H}(53)\,\mathrm{H}(-4).$$

On obtient directement, en cherchant les formes réduites, K(53) = 1 (¹), et par suite

$$f^8(\sqrt{-53})f^8\left(\frac{-10+\sqrt{-53}}{9}\right)f^8\left(\frac{10+\sqrt{-53}}{9}\right) = 2^6\,\mathrm{E}(53),$$

(¹) On ne peut se servir du nombre K(4.53) = 1 qui se trouve dans les Tables de Gauss, parce qu'il est évidemment inexact.

ou approximativement

$$E(53) = 2^{-6} e^{\frac{11\pi\sqrt{53}}{9}} \left(1 - 2e^{-\frac{\pi\sqrt{53}}{9}} \cos\frac{\pi}{9} + e^{-\frac{2\pi\sqrt{53}}{9}}\right)^{8}.$$

La partie entière du second membre est 51. Des relations

$$\frac{T + U\sqrt{53}}{2} = 51, \qquad \frac{T - U\sqrt{53}}{2} = \frac{1}{51},$$

on déduit encore approximativement $U = 7$, $T = 51$, et ces nombres vérifient exactement $T^2 - 53U^2 = 4$.

En général, on fera porter les essais sur U, qui varie moins vite que T.

NOTES.

NOTE I

(§ 5).

Voici une démonstration très simple de la formule

$$(1)\qquad \sum_{s=1}^{s=|D_0|} \left(\frac{D_0}{s}\right) e^{\frac{2sh\pi i}{|D_0|}} = \left(\frac{D_0}{h}\right)(\sqrt{D_0}), \quad h > 0, \quad [\S\ 5, (11)],$$

donnée par M. Weber [1]. On a

$$\sum_{s=1}^{s=p} \left(\frac{s}{p}\right) e^{\frac{2sh\pi i}{p}} = \left(\frac{h}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} |\sqrt{p}|. \qquad [\S\ 3, (13)]$$

(p premier).

Si p est un discriminant, cette formule coïncide précisément avec (1). La formule (1) se démontre d'ailleurs directement quand $D_0 = -4, \pm 8$. Il suffit donc de montrer que, si elle est vraie pour deux discriminants D'_0, D''_0 premiers entre eux, elle subsiste pour leur produit D_0. Or, on a

$$\sum_{s'} \left(\frac{D'_0}{s'}\right) e^{-\frac{2s'h\pi i}{|D'_0|}} \sum_{s''} \left(\frac{D''_0}{s''}\right) e^{-\frac{2s''h\pi i}{|D''_0|}} = \sum_{s', s''} \left(\frac{D'_0}{s'}\right)\left(\frac{D''_0}{s''}\right) e^{-\frac{2h\pi i}{|D_0|}(s'|D''_0|+s''|D'_0|)};$$

$$(s' = 1, 2, \ldots |D'_0|; \qquad s'' = 1, 2, \ldots |D''_0|)$$

la quantité $s'|D''_0| + s''|D'_0| = s$ parcourant un système de restes > 0 $(\mathrm{mod}\,|D_0|)$, on peut écrire

$$\left(\frac{D'_0}{s}\right) = \left(\frac{D'_0}{D''_0}\right)\left(\frac{D'_0}{s'}\right), \qquad \left(\frac{D''_0}{s}\right) = \left(\frac{D''_0}{D'_0}\right)\left(\frac{D''_0}{s''}\right),$$

donc

$$\left(\frac{D'_0}{s'}\right)\left(\frac{D''_0}{s''}\right) = \left(\frac{D_0}{s}\right)\left(\frac{D'_0}{D''_0}\right)\left(\frac{D''_0}{D'_0}\right) = \left(\frac{D_0}{s}\right)(-1)^{\frac{\operatorname{sgn} D'_0 - 1}{2}\,\frac{\operatorname{sgn} D''_0 - 1}{2}},$$

---

[1] *Göttinger Nachrichten*, p. 51; 1893.

et, comme

$$(\sqrt{D_0'})(\sqrt{D_0''}) = (\sqrt{D_0})(-1)^{\frac{\operatorname{sgn} D_0' - 1}{2}\frac{\operatorname{sgn} D_0'' - 1}{2}},$$

la formule (1) est établie.

NOTE II

(§§ 11, 15).

Pour déduire de l'équation identique

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\tau}{2}\sum_{A}\psi(D, 4A)F(A) = \sum_{a,b,c}\sum_{\alpha,\gamma}F(a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2) \qquad [\S\ 15, (51)], \\ (A,\ a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2 \text{ sont premiers à } Q;\ \alpha,\ \gamma \text{ sont premiers entre eux}) \end{array}\right.$$

la formule de Dirichlet, M. Weber démontre la formule suivante [1]

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{2}\sum_{c^2}\psi\left(D, \dfrac{4n}{c^2}\right) = \sum_{d}\left(\dfrac{D}{d}\right) \\ (d \text{ parcourt tous les diviseurs de } n;\ c^2 \text{ parcourt seulement les diviseurs carrés de } n, \text{ y compris } 1). \end{array}\right.$$

Si la formule est exacte pour $n = n_1$, $n = n_2$, n_1, n_2 étant premiers entre eux, elle l'est pour $n = n_1 n_2$, d'après une propriété connue de ψ, en observant que $\frac{1}{2}\psi(D, 4) = 1$. Il suffit donc de démontrer (2) pour $d = q^k$, q étant premier et ne divisant pas Q (q peut être égal à 2). Alors

$$d = q^s, \qquad s = 0, 1, 2, \ldots, k; \qquad \frac{n}{c^2} = q^{2s}, \qquad 0 \leq s \leq \frac{k}{2}.$$

Or on a (§ 11), outre $\psi(D, 4) = 2$,

$$1^\circ \quad \left(\frac{D}{q}\right) = \ \ 0, \quad \psi(D, 4q) = 2, \quad \psi(D, 4q^s) = 0 \quad (s > 1),$$

$$\left.\begin{array}{lll} 2^\circ & \left(\dfrac{D}{q}\right) = +1, & \psi(D, 4q^s) = 4 \\ 3^\circ & \left(\dfrac{D}{q}\right) = -1, & \psi(D, 4q^s) = 0 \end{array}\right\}\ (s \geq 1),$$

et l'on vérifie directement que les deux membres de (2) sont, dans ces

---

(1) *Gottinger Nachrichten*, p. 53; 1893.

trois cas, égaux respectivement à

$$1, \quad k+1, \quad \frac{1}{2}[1+(-1)^k].$$

La formule (2) devient maintenant, si l'on y remplace $F(z)$ par $F(h^2 z)$, h parcourant tous les nombres premiers à Q, et m, n toutes les valeurs pour lesquelles $am^2+bmn+cn^2$ est premier à Q,

$$\frac{\tau}{2}\sum_A\sum_h \psi(D, 4A)\,F(Ah^2) = \sum_{a,b,c}\sum_{m,n} F(am^2+bmn+cn^2).$$

Or, si l'on pose $Ah^2 = t$, le premier membre peut s'écrire, d'après (2),

$$\tau\sum_t\sum_h \left(\frac{D}{\frac{t}{h}}\right)F(t),$$

h parcourant pour chaque valeur de t tous les diviseurs de t. Donc, en faisant $t = hk$, on obtient

$$\tau\sum_h\sum_k \left(\frac{D}{k}\right)F(hk) = \sum_{a,b,c}\sum_{m,n} F(am^2+bmn+cn^2).$$

C'est l'équation de Dirichlet.

NOTE III

(§§ 18, 19, 20, 21).

M. Weber a donné de la première formule de Kronecker une démonstration très élégante que l'on peut présenter comme il suit.

Appelons diviseur fondamental d'un discriminant D tout diviseur δ de D ayant la forme d'un discriminant fondamental et tel que $\frac{D}{\delta}$ soit encore un discriminant. On obtient tous les δ en prenant d'abord tous les p_i (§ 19) auxquels on adjoindra -4 si $D \equiv -4 \pmod{16}$ ou $16 \pmod{32}$, $\varepsilon 8$ si $D \equiv \varepsilon 8 \pmod{32}$ $(\varepsilon = \pm 1)$, -4 et 8 si $D \equiv 0 \pmod{32}$, et en formant avec ces facteurs tous les produits possibles sans prendre deux fois le même facteur. Il est facile de voir que le nombre des δ est précisément $2^\lambda = 2g$ (d'après les notations du § 19).

Si δ_1, δ_2 sont deux diviseurs fondamentaux, le discriminant fondamental δ de $\delta_1\delta_2$ sera encore un diviseur fondamental que nous dirons *composé* de δ_1, δ_2 et nous écrirons $\delta = \delta_1\delta_2$. Ainsi $\delta_1^2 = 1$, $\delta\delta_2 = \delta_1$ et les δ forment un groupe abélien.

On démontre comme au § 19 que, pour tout nombre m premier à $2D$ et représentable par une classe primitive H, le symbole $\left(\frac{\delta}{m}\right)$ a la même valeur que nous pourrons désigner par $\left(\frac{\delta}{H}\right)$ et l'on voit que $\left(\frac{\delta}{H}\right)\left(\frac{\delta}{H'}\right)\left(\frac{\delta}{HH'}\right)$.

Si $\delta\delta' = D_0$, nous dirons que δ et δ' sont complémentaires, et, puisque $\left(\frac{D_0}{-}\right) = 1$, on aura $\left(\frac{\delta}{-}\right) = \left(\frac{\delta'}{-}\right)$.

Il est important d'observer que tout facteur commun à δ et à δ' divise Q, car sans cela $D_0 = \delta\delta'$ pourrait perdre un facteur carré sans cesser d'être discriminant.

Cela posé, si q^k est représentable par H, q étant premier et ne divisant pas Q, on vérifie immédiatement la formule

$$(1)\qquad \left(\frac{\delta}{H}\right)\sum_{s=0}^{s=k}\left(\frac{D_0}{q^s}\right) = \sum_{s=0}^{s=k}\left(\frac{\delta}{q^s}\right)\left(\frac{\delta'}{q^{k-s}}\right),$$

en multipliant chaque terme du second membre par $\left(\frac{\delta}{q^{k-s}}\right)^2 = 1$, si δ est premier à q, par $\left(\frac{\delta'}{q^s}\right)^2 = 1$ si δ' est premier à q. On en déduit la formule plus générale

$$(2)\qquad \left(\frac{\delta}{H}\right)\sum_{d}^{n}\left(\frac{D}{d}\right) = \sum_{d}^{n}\left(\frac{\delta}{d}\right)\left(\frac{\delta'}{d'}\right),\qquad dd' = n$$

(n est représentable par la classe H et premier à Q),

car, si la formule est vraie pour $n = n_1$, $n = n_2$, n_1, n_2 étant premiers entre eux, elle l'est pour $n = n_1 n_2$ (§ 12) et, par conséquent, (2) résulte de (1).

Si alors, dans l'équation de Dirichlet,

$$\tau\sum_{h,k}\left(\frac{Q^2}{h}\right)\left(\frac{D}{k}\right)F(hk) = \sum_{a,b,c}\sum_{m,n}\left(\frac{Q^2}{m}\right)F(am^2+bmn+cn^2)\quad [\S\ 15, (7)],$$

on prend $F(z) = \left(\frac{\delta}{H}\right)f(z)$, H étant la classe de $(a\ b, c)$, on aura, d'après (2) où l'on fait $n = hk$,

$$\tau\sum_{h,k}\left(\frac{Q^2}{h}\right)\left(\frac{\delta}{h}\right)\left(\frac{\delta'}{k}\right)f(hk) = \sum_{a,b,c}\left(\frac{\delta}{H}\right)\sum_{m,n}\left(\frac{Q^2}{m}\right)f(am^2+bmn+cn^2).$$

C'est la formule de Kronecker.

Supposons maintenant démontré *a priori* que chaque genre contient le

même nombre de classes (§ 21). La formule précédente montre (§ 20) que

$$\sum_{H}\left(\frac{\delta}{H}\right) = 0 \quad \text{si} \quad \delta \neq 1, \quad \delta \neq D_0$$

(H parcourant les classes primitives).

On a d'ailleurs évidemment

$$\sum_{H}\left(\frac{\delta}{H}\right) = K(D) \quad \text{si} \quad \delta = 1 \quad \text{ou} \quad \delta = D_0.$$

Si H est une classe étrangère au genre principal et $\left(\frac{\delta_1}{H}\right) = -1$,

$$\left(\frac{\delta_1}{H}\right)\sum_{\delta}\left(\frac{\delta}{H}\right) = -\sum_{\delta}\left(\frac{\delta}{H}\right);$$

δ_1 parcourant tous les δ, le premier membre $=\sum_{\delta}\left(\frac{\delta}{H}\right)$; donc

$$\sum_{\delta}\left(\frac{\delta}{H}\right) = 0.$$

Si H appartient au genre principal,

$$\sum_{\delta}\left(\frac{\delta}{H}\right) = 2^{\lambda}.$$

Considérons alors la double somme

$$\sum_{H}\sum_{\delta}\left(\frac{\delta}{H}\right) = S.$$

Si l'on somme d'abord par rapport à δ, puis par rapport à H, on aura $S = 2^{\lambda} g$. Si l'on somme d'abord par rapport à H, puis par rapport à δ, on aura $S = 2K(D)$ (à cause des deux valeurs $\delta = 1$, $\delta = D_0$). Donc

$$g = \frac{K(D)}{2^{\lambda-1}}.$$

NOTE IV

(§ 37).

On obtient tous les discriminants en prenant, avec les déterminants de Gauss multipliés par 4, ceux de ces déterminants qui sont $\equiv 1 \pmod 4$. Parmi les discriminants formés de la première manière on en connait,

comme il a été dit, 65 pour lesquels toutes les classes sont ambiguës. Parmi les discriminants formés de la seconde manière, il y en a aussi qui jouissent de cette propriété. Ce sont ceux qui sont $\equiv 5 \pmod 8$ et qui multipliés par 4 donnent trois classes par genre. On en trouve 28 négatifs dans les Tables de Gauss. Ce sont les suivants :

$$\begin{array}{ccccccccc} -11, & -19, & -27, & -35, & -43, & -51, & -67, & -91, & -99, \\ -115, & -123, & -147, & -163, & -187, & -195, & -235, & -267, & -315, \\ -403, & -427, & -435, & -483, & -555, & -595, & -627, & -715, & -795 \end{array}$$ (1).

Les classes fournies par ces discriminants répondent aux classes de seconde espèce de Gauss.

M. Hermite a montré que, pour les discriminants -43, -67, -163, qui ne donnent lieu qu'à une seule classe, les transcendantes

$$e^{\pi\sqrt{43}}, \quad e^{\pi\sqrt{67}}, \quad e^{\pi\sqrt{163}}$$

sont très voisines de nombres entiers (2).

---

(1) C'est par erreur que -827 se trouve mentionné à la p. 466 avec la classication IV, 3.

(2) *Comptes rendus*, t. XLVIII, p. 1101; 1859.

ERRATA.

Pages.	Lignes.	*Au lieu de*	*Lisez*
2	16	$= h$	$i = h$
6	14	$e^{\frac{2i\pi n_i z_i}{\omega_i}}$	$e^{\frac{2i\pi z_i}{\omega_i}}$
32	18	(18)	(11)
57	3	le premier	la première
»	6	$l)n$	$l), n$
»	34	$=$	$\equiv$
58	21	ces τ représentations	ces représentations
61	3	$a_1, a_2, \ldots, a_r$	$a_1 a_2 \ldots a_r$
62	5	k	k'

64 après le tableau, *ajouter* Donc

$$\frac{1}{2}\psi(D, 4A) = \prod_{i=1}^{i=r}\left[1+\left(\frac{D}{p_i}\right)\right]\left(\frac{D}{p_i}\right)^{\operatorname{sgn}(\alpha_i-1)}.$$

$$(i = 0, 1, \ldots, r;\ p_0 = 2;\ \alpha_i \geq 1)$$

» 22 *remplacer la fin du raisonnement, depuis* Cette série, *par* On aura

$$S = \prod_q \left\{1+\left[1+\left(\frac{D}{q}\right)\right]\frac{1}{q^s}+\left(\frac{D}{q}\right)\left[1+\left(\frac{D}{q}\right)\right]\left[\frac{1}{q^{2s}}+\frac{1}{q^{3s}}+\ldots\right]\right\},$$

(q parcourt les facteurs premiers étrangers à Q)

ou

$$S = \prod_q \frac{1+\frac{1}{q^s}}{1-\left(\frac{D}{q}\right)\frac{1}{q^s}}.$$ *et passer à la page* 66

Pages.	Lignes.	*Au lieu de*	*Lisez*
109	9	représentants	représentations
111	2	$\sum_m$	$\sum_{m=1}^{m=\infty}$
»	21	que à	qu'à
115	12	m	sn
»	22	$\log F_n(x)$	(8′) $\log F_n(x)$
116	4	ou	ce que donnait déjà (8′), ou

ERRATA.

Pages.	Lignes.	*Au lieu de*	*Lisez*
123	4	converge	converge,
»	21	inférieur	supérieur
124	26	$\int_0^{\frac{T}{U}}$	$\int_{\frac{T}{U}}^{\infty}$
126	14	$\left(\frac{D_0}{h'}\right)$	$(\sqrt{D_0})\left(\frac{D_0}{h}\right)$
132	19	$=1$	$i=1$
»	»	$k=$	$k=1$
133	5	D_1 est un discriminant diviseur de D	D_1 et D_2 sont des discriminants
216	17	β α	$\frac{\beta}{\alpha}$
299	12	$= 64$	-64
»	20	$--64$	$+64$
307	19	$D_0 D_1^{-1} d^2$	$D_0 D_1^{-1} d^4$
314	18	$f_1(\sqrt{-90})\,E(53)$	$f_1(\sqrt{-90}),\ E(53)$
319	2	$\frac{2}{5}$	$\frac{2\pi}{5}$
»	8	$2H(5.5^2)$	$4H(5.5^2)$
321	12	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{9}$
»	»	$\frac{32}{9}$	$\frac{64}{9}$
330	13	D^0	D_0
»	»	supprimer les signes — dans les exposants	
333	3	$\left(\frac{\delta}{HH'}\right)$	$=\left(\frac{\delta}{HH'}\right)$
335	4	28	27

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

LA PREMIÈRE FORMULE DE KRONECKER.

PREMIÈRE SECTION.

THÉORIES PRÉLIMINAIRES.

CHAPITRE I.

LES SOMMES DE GAUSS.

CHAPITRE II.

PRINCIPES DE LA THEORIE DES FORMES QUADRATIQUES.

CHAPITRE III.

COMPOSITION DES FORMES.

SECONDE SECTION.

FORMULE FONDAMENTALE. APPLICATIONS.

CHAPITRE IV.

L'ÉQUATION DE DIRICHLET GÉNÉRALISÉE PAR KRONECKER.

CHAPITRE V.

LES GENRES.

CHAPITRE VI.

LES SOMMES DE GAUSS GÉNÉRALISÉES.

DEUXIÈME PARTIE.

LA SECONDE FORMULE DE KRONECKER.

CHAPITRE VII.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

CHAPITRE VIII.

LA SECONDE FORMULE FONDAMENTALE DE KRONECKER.

CHAPITRE IX.

INVARIANTS DES CLASSES DE FORMES QUADRATIQUES ARITHMÉTIQUES. VALEUR MOYENNE D'UN INVARIANT.

TROISIÈME PARTIE.

APPLICATION COMBINÉE DES DEUX FORMULES DE KRONECKER.

CHAPITRE X.

NORMES PARTIELLES ET TOTALES. ÉQUATION DE PELL.

ERRATUM.

Page 133, ligne 5, en remontant, *au lieu de* D_1 est un discriminant diviseur de D, *lire* D_1 et D_2 sont des discriminants.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
20712 Quai des Grands-Augustins, 55.

